Natürlicher CO2 Kreislauf mit räumlicher Wärmeverteilung und Fehlerfortpflanzung

Eine menschenfreie Erde bei solarer Erwärmung über 200 Jahre

Dr. Klaus Retzlaff und Proto

Eine wissenschaftliche Kooperation von Mensch und KI

Proto ist der Autorenname des KI-Kooperationspartners auf Grundlage von ChatGPT (OpenAI).

Studie III · Modellversion 3.0 · 25. November 2026

Diese Untersuchung erweitert Studie II „Natürlicher CO2 Kreislauf mit Pflanzenwachstum und Wasserhaushalt“ [1]. Sie ersetzt deren globale Temperaturansätze durch sechs Breitenbänder mit getrennten Land- und Meeresflächen, unterschiedlichen Ausgangstemperaturen und regionalen Erwärmungsraten. Die vorgegebene globale Temperatur steigt unverändert linear von 13,5 auf 15,5 °C in 200 Jahren; die Atmosphäre beginnt bei 300 ppm CO_2. Menschheit, Industrie und anthropogene Landnutzungsflüsse existieren auf dieser Modell-Erde nicht.

Der Referenzlauf ergibt nach 200 Jahren 332,8 ppm CO_2. Das sind 32,8 ppm mehr als anfangs und 1,0 ppm weniger als im Referenzlauf der zweiten Studie. Die räumliche Verfeinerung ändert die zentrale Größenordnung somit wenig. Sie macht jedoch die Flächengewichtung, die Unterschiede zwischen Luft- und Wassertemperaturen sowie die regionale Zuordnung der Kohlenstoffreaktionen ausdrücklich nachvollziehbar.

Für eine gesondert erklärte Unsicherheitsrechnung werden die Parameterbereiche mit Typ-B-Verteilungen belegt. Am Mittelpunkt dieser Eingangsverteilungen ergibt sich ein Bezugswert von 335,7 ppm. Die lineare Fehlerfortpflanzung liefert bei Jahr 200 eine Standardunsicherheit von 12,3 ppm und das erweiterte Band 311,1 bis 360,3 ppm für den Faktor k = 2. Dieses Band ist an Modell und Eingangsverteilungen gebunden. Es ist keine garantierte physikalische Minimal- und Maximalkonzentration.

Rechnung	Jahr 200	Änderung ab 300 ppm	Bedeutung
Studie II Referenz	333,8 ppm	+33,8 ppm	Globaler Vorgänger
Studie III Referenz	332,8 ppm	+32,8 ppm	Vergleichbare Nominalannahmen
Studie III Unsicherheitsbezug	335,7 ppm	+35,7 ppm	Lauf mit Parametermittelwerten
Fehlerfortpflanzung mit k = 2	311,1–360,3 ppm	+11,1 bis +60,3 ppm	Bedingtes erweitertes Band

1 Fragestellung und feste Randbedingungen

Gesucht ist eine grobe quantitative Antwort des natürlichen Kohlenstoffkreislaufs auf einen vorgegebenen Temperaturpfad. Die Sonnenstrahlung ist der einzige äußere Erwärmungsantrieb. Die insgesamt erreichten 2 K werden als Randbedingung behandelt. Eine zusätzliche Erwärmung durch das berechnete CO_2 oder mehr Wasserdampf wird nicht noch einmal auf diesen Pfad aufgeschlagen. Dafür wäre ein eigenes gekoppeltes Strahlungs- und Energiebilanzmodell erforderlich.

$$\theta(t) = 2t/200\,; \quad \overline{T}(t) = 13{,}5\,°\mathrm{C} + \theta(t)\,; \quad c(0) = 300\,\mathrm{ppm}$$

„Globale Oberflächentemperatur“ bezeichnet hier ausdrücklich das flächengewichtete Jahresmittel der bodennahen Lufttemperatur über Land und Meer. Das Meerwasser besitzt daneben seine eigene

Oberflächentemperatur. Diese Trennung ist über Meereis unverzichtbar. Die Entwicklung des globalen Luftmittels wird bei jedem Unsicherheitslauf exakt eingehalten.

Temperatur und Wärmeinhalt sind verschiedene Größen. Warme Tropen und kalte Pole werden jetzt temperaturabhängig aufgelöst. Ein Wärmeinhalt in Joule würde zusätzlich Masse, spezifische Wärmekapazität, Wassertiefe und Wärmetransport erfordern. Diese dritte Studie ist weiterhin ein Kohlenstoffmodell mit vorgegebener Temperaturverteilung, keine eigenständige Berechnung der Energieverteilung des Planeten.

Der Ausgangszustand ist ein stationäres natürliches Gleichgewicht. Große natürliche Hin- und Rückflüsse bestehen weiterhin, werden aber nur über ihre Änderungen bilanziert. Vulkanismus und andere unveränderte geologische Grundflüsse sind im Ausgangsgleichgewicht enthalten; es gibt keinen zusätzlichen menschlichen Quellterm. Ein GtC entspricht einer Gigatonne Kohlenstoff; zur Umrechnung gilt unverändert 1 ppm CO_2 = 2,12 GtC in der Atmosphäre.

2 Geographische Flächengewichte

Die sechs Bänder reichen von 90–60° S, 60–30° S und 30° S–0° bis zu den entsprechenden drei nördlichen Bändern. Gleich breite Winkelbänder besitzen auf einer Kugel unterschiedliche Flächen. Für ein Band mit den Grenzbreiten ϕ_1 und ϕ_2 gilt:

$$w_i = [\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)]/2\,; \quad w_{\mathrm{L}i} + w_{\mathrm{O}i} = w_i$$

Die Landanteile wurden aus den Natural-Earth-Landpolygonen im Maßstab 1:50 Millionen, Version 4.0, durch sphärische Flächenintegration berechnet [2]. Die Flächenzahlen sind damit aus einer Küstenmaske abgeleitet und nicht frei gewählte Drittel- oder Halbgewichte. Die beiden äquatornahen Bänder umfassen zusammen 50 Prozent der Oberfläche; die beiden Polarkappen zusammen 13,40 Prozent.

Breitenband	Bandfläche global	Landfläche global	Meeresfläche global
90–60° S	6,699 %	2,403 %	4,296 %
60–30° S	18,301 %	1,046 %	17,256 %
30° S–0°	25,000 %	5,730 %	19,270 %
0–30° N	25,000 %	7,150 %	17,850 %
30–60° N	18,301 %	9,051 %	9,250 %
60–90° N	6,699 %	3,368 %	3,331 %

Die Landmaske ergibt 28,7475 Prozent der Kugeloberfläche. Schwimmende antarktische Schelfe umfassen weitere 0,3039 Prozent. Sie gehören hier geometrisch zur Nichtlandfläche, werden aber beim Gasaustausch gesondert gesperrt. Mit Schelfen ergibt sich ein Anteil fester beziehungsweise vereister Oberfläche von 29,0514 Prozent. Die generalisierte Küstenmaske sowie kleine Inseln und Binnengewässerkonventionen erklären Unterschiede zu gerundeten Angaben von 29 zu 71 Prozent.

Die globale Temperatur wird mit diesen Flächengewichten berechnet. Vegetationsproduktion und Bodenkohlenstoff erhalten andere Gewichte. Ein Quadratkilometer antarktisches Eis wird deshalb weder wie ein Quadratkilometer Wald noch wie eine offen gasaustauschende Meeresfläche behandelt.

3 Ausgangsklima und regionaler Erwärmungspfad

3.1 Tatsächlich ausgewertete Klimadaten

Als räumliche Formvorlage dienen die monatliche Klimatologie 1981–2010 der NCEP/NCAR Reanalysis 1 für die 2-m-Lufttemperatur und den Niederschlag sowie COBE für die Meeresoberflächentemperatur. Die Daten wurden von NOAA PSL bereitgestellt [3, 4]. Monatsmittel wurden nach Monatslänge gewichtet. Für die Land-Meer-Trennung wurde ein sphärisch gewichtetes Hilfsraster von 0,125° verwendet; die Produktivitätsrechnung hält 7.722 Klimarasterzellen beziehungsweise Bandteile getrennt.

Die moderne Klimatologie rekonstruiert keine Welt ohne Menschen. Verwendet wird ihre grobe räumliche Form, nicht ihre anthropogene Kohlenstoffbilanz. Ihr flächengewichtetes Luftmittel beträgt in dieser Auswertung 14,0397 °C. Ein gemeinsamer Offset von −0,5397 K stellt den geforderten Anfangswert 13,5 °C her. Für das zentrale SST-Profil wird derselbe Offset ausdrücklich ebenfalls angesetzt; polare Wassertemperaturen bleiben durch eine Untergrenze von −1,8 °C physikalisch begrenzt.

Breitenband	Landluft T_o	Meeresluft T_o	Meerwasser SST_o
90–60° S	-35,7 °C	-9,3 °C	-1,2 °C
60–30° S	13,5 °C	9,9 °C	10,6 °C
30° S–0°	21,4 °C	23,8 °C	25,0 °C
0–30° N	22,7 °C	25,2 °C	26,3 °C
30–60° N	5,2 °C	12,3 °C	13,7 °C
60–90° N	-9,8 °C	-9,6 °C	0,5 °C

Insbesondere beträgt die nördliche polare Meereslufttemperatur etwa −9,6 °C, das zugehörige flüssige Oberflächenwasser aber etwa +0,5 °C. Die Verwendung der Lufttemperatur als Wasserwert würde die CO_2-Chemie deutlich verfälschen. Die Datenprüfung mit einem 0,25°-Hilfsraster veränderte zonale Landmittel höchstens um 0,051 K und SST-Mittel um 0,003 K; dies quantifiziert die räumliche Integration, nicht die Unsicherheit der hypothetischen Anfangswelt.

3.2 Normiertes Erwärmungsmuster

Ein wärmerer Ausgangszustand am Äquator bedeutet nicht zwingend, dass dort auch der größte Temperaturzuwachs auftritt. Das Modell trennt deshalb Ausgangstemperatur und Erwärmung. Für die Zunahme wird eine einfache Land-Meer-Differenz mit einer polwärts wachsenden Komponente angesetzt. Solare Modellversuche zeigen räumlich unterschiedliche Antworten; die konkreten hier gewählten Verstärkungsfaktoren sind Szenarioannahmen, keine aus der globalen Erwärmung ableitbaren Messwerte [7].

$$q_i = \langle \sin^2\varphi \rangle_i \,; \quad b_i = 1 + p\, h_i\, q_i$$

$$Z = \sum_i (w_{\mathrm{L}i} L\, b_i + w_{\mathrm{O}i} b_i)$$

$$r_{\mathrm{L}i} = L\, b_i / Z \,; \quad r_{\mathrm{O}i} = b_i / Z$$

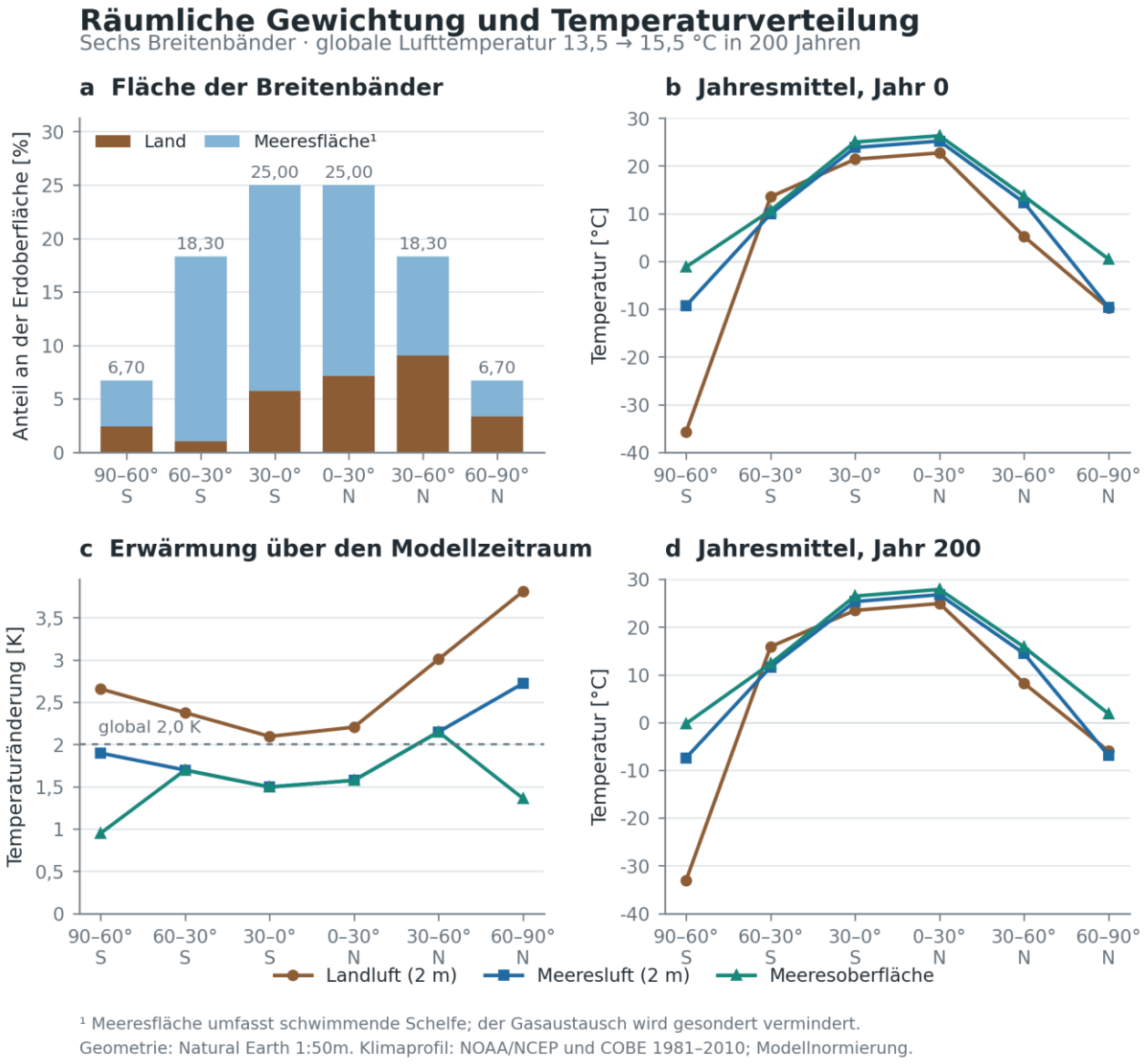
$$T_{\mathrm{L}i}(t) = T_{\mathrm{L}i}(0) + r_{\mathrm{L}i}\theta(t) \,; \quad T_{\mathrm{O}i}(t) = T_{\mathrm{O}i}(0) + r_{\mathrm{O}i}\theta(t)$$

Zentral gelten L = 1,4 und p = 1. Der hemisphärische Faktor h beträgt nördlich des Äquators 1 und südlich 0,35. Damit wird eine schwächere südliche polare Verstärkung zugelassen. q_i wird exakt über die sphärische Bandfläche gemittelt. Durch die Normierung gilt $\Sigma(w_{Li}\, r_{Li} + w_{Oi}\, r_{Oi}) = 1$. Bei jeder Änderung von L oder p wird Z erneut berechnet.

Breitenband	Erwärmung über Land	Meeresluftzunahme	SST-Zunahme
90–60° S	2,66 K	1,90 K	0,95 K
60–30° S	2,38 K	1,70 K	1,70 K
30° S–0°	2,09 K	1,50 K	1,50 K
0–30° N	2,20 K	1,57 K	1,57 K
30–60° N	3,01 K	2,15 K	2,15 K
60–90° N	3,81 K	2,72 K	1,36 K

Außerhalb der Polarbänder übernimmt die SST die jeweilige Meeresluft-Zunahme. In den beiden Polarbändern wird sie zentral mit dem Faktor $\chi = 0{,}5$ gedämpft. Diese Näherung trägt dazu bei, Luftverstärkung über Eis und das Erwärmen des flüssigen Wassers auseinanderzuhalten; sie ist keine thermodynamische Meereissimulation. Der Faktor χ wird in der Unsicherheitsrechnung zwischen 0,2 und 0,8 variiert.

Der unsichere Ausgangskontrast B wird als $T_i(0;B) = 13{,}5 + B[T_i(0;1) - 13{,}5]$ beschrieben. Für die Klimarasterzellen eines Landbandes wird dieselbe Bandverschiebung angewandt; Produktivitätsgewichte und Anfangsbestände werden danach neu bestimmt. Bei der SST wird die zugehörige Meeresluft-Bandverschiebung auf das eigenständige COBE-Profil übertragen und die Gefriergrenze beachtet. Dies ist eine ausdrücklich gekoppelte Sensitivitätsannahme. Sie setzt die Luft- und Wassertemperatur nicht gleich.



¹ Meeresfläche umfasst schwimmende Schelfe; der Gasaustausch wird gesondert vermindert.
Geometrie: Natural Earth 1:50m. Klimaprofil: NOAA/NCEP und COBE 1981–2010; Modellnormierung.

Abbildung 1. Sphärische Flächenverteilung und getrennte regionale Temperaturen. Die Daten liefern das Ausgangsprofil; die auf global 2 K normierten Zuwächse stammen aus dem erklärten Erwärmungsmuster.

4 Regionale Biosphäre und Böden

4.1 Produktivität aus Klimarasterzellen

Die Landgewichtung benutzt eine potenzielle, klimatisch begrenzte Produktivität. Dafür wird das Miami-Modell nach Lieth auf jede eisfreie Klimarasterzelle angewandt [5, 6]. Dieses empirische Modell verwendet Jahresmitteltemperatur T in °C und Jahresniederschlag P in Millimetern:

$$M(T,P) = \min\{3000/[1+\exp(1{,}315-0{,}119T)]\,;\; 3000[1-\exp(-0{,}000664P)]\}$$

M ist in Gramm Trockenmasse je Quadratmeter und Jahr definiert. In dieser Studie werden daraus relative Gewichte und Antwortquotienten gebildet; der konstante Maßstabsfaktor fällt heraus. Gletscherflächen werden ausgeschlossen, die antarktische Landbox erhält keine reguläre NPP. Erst nach der Zellberechnung werden Flächen und Produktivität innerhalb eines Bandes summiert. Dadurch werden aride und kalte Rasterzellen nicht durch eine künstliche „mittlere Landschaft“ ersetzt.

$$M_i(x) = \sum_j A_j\, M(T_{j0}+x, P_{j0})\,; \quad w_{\mathrm{N}i} = M_i(0) / \sum_k M_k\,(0)$$

Im Referenzlauf liegen 67,3 Prozent der potenziellen NPP in den beiden äquatornahen Bändern, 25,8 Prozent in den nördlichen Mittelbreiten und 3,7 Prozent im nördlichen Polarband. Die globalen Anfangssummen aus Studie II bleiben NPP = 60 GtC/a, Vegetation V = 900 GtC und regulärer Boden S = 1200 GtC. Der ursprünglich gefrorene Permafrostpool wird getrennt geführt.

Breitenband	Anteil an NPP	Vegetation V_o	Regulärer Boden S_o
90–60° S	0,00 %	0,0 GtC	0,0 GtC
60–30° S	3,10 %	27,9 GtC	40,4 GtC
30° S–0°	34,73 %	312,6 GtC	319,3 GtC
0–30° N	32,60 %	293,4 GtC	297,6 GtC
30–60° N	25,84 %	232,5 GtC	438,6 GtC
60–90° N	3,74 %	33,6 GtC	104,1 GtC

Die Biomasse wird zunächst proportional zur NPP verteilt; daraus folgt eine Vegetationsumsatzzeit von 15 Jahren. Kalte Böden erhalten längere Umsatzzeiten. Mit der NPP-gewichteten Temperatur T_{bio} der tatsächlich eisfreien Zellen wird angesetzt:

$$w_{\mathrm{S}i} \propto w_{\mathrm{N}i}\exp[-\lambda(T_{\mathrm{bio},i0} - 13{,}5)]\,; \quad \sum_i w_{\mathrm{S}i} = 1$$

$$N_{i0} = 60 w_{\mathrm{N}i}\,; \quad V_{i0} = 900 w_{\mathrm{N}i}\,; \quad S_{i0} = 1200 w_{\mathrm{S}i}$$

$$\tau_{\mathrm{V}} = 15\,\mathrm{a}\,; \quad f = 0{,}4\,; \quad \tau_{\mathrm{S}i} = S_{i0}/(f N_{i0})$$

Zentral ist λ = 0,04 K^{-1}. Die fünf belebten Bänder besitzen damit Bodenumsatzzeiten von etwa 54,3; 38,3; 38,0; 70,7 und 116,1 Jahren, von Süd nach Nord. Diese Bestandszuordnung ist eine Gleichgewichtsrekonstruktion, keine Messung regionaler natürlicher Kohlenstoffbestände. Sie hält die vorgegebenen Summen ein und erfüllt in jeder Zone $N_{i0} = V_{i0}/\tau_V$ sowie f $V_{i0}/\tau_V = S_{i0}/\tau_{Si}$.

4.2 Temperatur und CO_2 im Pflanzenwachstum

Die alte globale Landantwort darf durch eine neue räumliche Klimafunktion nicht unbeabsichtigt nochmals addiert werden. Deshalb wird deren globale Anfangssteigung zentriert. Aus genau dem verwendeten Rasterintegral ergibt sich $\mu_N = \Sigma\, w_{Ni}[d \ln M_i/dx]$ bei x = 0. Zentral ist μ_N = 0,021862 K^{-1}. Die klimatische Produktion lautet:

$$N_{\mathrm{K}i} = N_{i0}\exp[k_*\theta_{\mathrm{L}i} + \zeta\{\ln[M_i(\theta_{\mathrm{L}i})/M_i(0)] - \mu_{\mathrm{N}}\theta_{\mathrm{L}i}\}]$$

$$N_i = N_{\mathrm{K}i}(c/300)^{\eta}\exp[a_{\mathrm{NP}}\theta - a_{\mathrm{ND}}\theta_{\mathrm{L}i}]$$

Zentral gelten ζ = 0,5 und η = 0,30. ζ bestimmt, wie stark die räumliche Miami-Antwort übernommen wird. Der Quotient verwendet die absolute lokale Ausgangstemperatur und berücksichtigt die bereits bestehende Niederschlagsbegrenzung. Bei einer überall gleichen kleinen Landerwärmung verschwindet die gewichtete Zusatzsteigung des ζ-Terms. Regionale Unterschiede, Nichtlinearität und unterschiedliche Erwärmungsraten bleiben erhalten.

Der Koeffizient k_* wird nur einmal im homogenen Referenzmodell für den jeweiligen Landparameter g bestimmt. Dort gelten T_o = 13,5 °C, konstantes CO_2 und Wasser sowie lokale Landerwärmung 1,2 θ. Gefordert wird ein Nettoverlust der beiden Landpools von 2g nach 200 Jahren. Mit g = 45 GtC/K beträgt dieser Verlust 90 GtC und k_* = -0,000281214 K^{-1}. Nach der geographischen Aufteilung erfolgt keine erneute Anpassung des Endwerts. g ist ein übernommener Vergleichsanker, keine neu gemessene regionale Größe.

Die CO_2-Förderung und ihre Beschränkung durch Nährstoffe und Speicherung bleiben wie in Studie II als effektiver Exponent enthalten. Ein zusätzliches, getrenntes CO_2-Wasserspargeschenk wird nicht addiert. Die Funktionsform löst weder Artenwechsel noch Nährstoffkreisläufe, Hitzeschäden und Akklimatisation mechanistisch auf. Der aus räumlichen Klimadaten abgeleitete Miami-Zusammenhang ist insbesondere kein Beweis für eine gleich große zeitliche Reaktion eines bestehenden Waldes.

4.3 Bodenatmung und Wasserhaushalt

Die Bodenatmung wird mit einer normierten Arrhenius-Funktion berechnet. Anders als ein überall gleiches exp(k ΔT) hängt deren relative Antwort von der absoluten Ausgangstemperatur ab:

$$R_{hi} = (S_i/\tau_{Si})\exp[(E_a/R_g)\{1/T_{\mathrm{bio},i0,\mathrm{K}} - 1/(T_{\mathrm{bio},i0,\mathrm{K}} + \theta_{\mathrm{L}i})\}]$$

$$R_{hi} \leftarrow R_{hi}\exp[a_{\mathrm{RP}}\theta - a_{\mathrm{RD}}\theta_{\mathrm{L}i}]$$

E_a = 28,667 kJ/mol ist so gewählt, dass die Referenzreaktion von 13,5 auf 23,5 °C genau dem bisherigen effektiven Q_{10} = 1,5 entspricht. Diese Umparametrisierung ist keine unabhängige Messung einer Aktivierungsenergie. Ein weiterer globaler Faktor 1,2 wird hier nicht multipliziert, weil die lokale Landerwärmung bereits ausdrücklich vorliegt.

$$a_{\mathrm{NP}} = \varepsilon_{\mathrm{N}} h_{\mathrm{P}}\,; \quad a_{\mathrm{ND}} = \varepsilon_{\mathrm{N}} h_{\mathrm{D}}/1{,}2$$

$$a_{\mathrm{RP}} = \varepsilon_{\mathrm{R}} h_{\mathrm{P}}\,; \quad a_{\mathrm{RD}} = \varepsilon_{\mathrm{R}} h_{\mathrm{D}}/1{,}2$$

Zentral gelten h_P = 0,024 K^{-1}, h_D = 0,030 K^{-1}, ε_N = 0,5 und ε_R = 0,25. Der Regenfaktor bezieht sich auf die globale Erwärmung, der Verdunstungsanspruch auf die lokale Landerwärmung. Im homogenen Referenzfall $\theta_L = 1{,}2\,\theta$ wird genau der Wasseransatz aus Studie II zurückgewonnen. Die Größenordnung des solaren Regenansatzes ist durch Modellversuche motiviert [8]; regionale Niederschlagsmuster bleiben hier vereinfacht. Mehr atmosphärischer Wasserdampf wird nicht mit derselben prozentualen Zunahme des Niederschlags gleichgesetzt.

$$\mathrm{d}V_i/\mathrm{d}t = N_i - V_i/15$$

$$\mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t = 0{,}4V_i/15 - R_{hi} - J_i$$

$$J_i = (1-\rho)\,0{,}4V_{\mathrm{C}i}/15$$

V_{Ci} kennzeichnet den durch erhöhtes CO_2 hinzugekommenen Vegetationsanteil und ist bereits Teil von V_i. Er wird aus N_{Ki} einschließlich Wasserfaktor mal $\max[(c/300)^{\eta}-1{,}0]$ gespeist und mit derselben 15-jährigen Umsatzzeit abgebaut. Der Faktor ρ bestimmt, wie viel dieses zusätzlichen Eintrags den langsamen Bodenpool erreicht. Zentral gilt ρ = 1. J ist eine verkürzte Verweilzeit zusätzlichen Kohlenstoffs; ein zusätzlicher Abbau alten Bodenkohlenstoffs durch echtes Priming wird dadurch nicht simuliert.

5 Ozean mit sechs Oberflächenboxen

Jedes Breitenband besitzt eine 100 m tiefe Oberflächenbox. Darunter liegt eine gemeinsame, gut gemischte Tiefenbox. Ihre Volumina werden aus der jeweiligen Meeresfläche und dem Gesamtvolumen von $1{,}332 \times 10^{18}$ m³ bestimmt. Ausgangs-DIC, Dichte und Revelle-Faktor bleiben zentral bei 2,05 Millimol je Kilogramm, 1025 kg/m³ und 10. Der Austausch Q beträgt 50 Sv; 1 Sv = 10^6 m³/s. Die Zuteilung Q_i erfolgt proportional zur Meeresfläche. Eine reale meridionale Umwälzzirkulation wird damit nicht aufgelöst.

Der temperaturabhängige Gleichgewichtsdruck des Oberflächenwassers wird nach der van't-Hoff-Näherung von Humphreys beschrieben [9]. Sie umfasst die thermische Wirkung auf Löslichkeit und Karbonatgleichgewichte. Ein zusätzlicher Henry-Faktor wäre eine Doppelzählung.

$$c_{wi} = 300\exp[(b_h/R_g)\{1/T_{Si0,\mathrm{K}} - 1/(T_{Si0,\mathrm{K}} + \theta_{Si})\}](1 + s_i/C_{si0})^R$$

Hier sind s_i die Kohlenstoffanomalien der Oberflächenboxen, C_{si0} ihre Anfangsbestände, R der Revelle-Faktor und b_h = 28 995 J/mol. Die thermische Anfangssteigung $b_h/(R_g\,T^2)$ ist bei kaltem Wasser größer als bei warmem Wasser. Der überall gleiche Koeffizient von Studie II ist damit ersetzt. Ein räumlich konstantes b_h bleibt eine Näherung; Salinität, Alkalinität und biologische Pumpen werden nicht vollständig aufgelöst.

$$F_{\mathrm{AS}i} = [C_{si0}/(R \cdot 300 \cdot 0{,}5\ \mathrm{a})]\, O_i(t)\, [c - c_{wi}]$$

$$F_{\mathrm{SD}i} = Q_i[s_i/V_{si} - d/V_d]$$

$$\mathrm{d}s_i/\mathrm{d}t = F_{\mathrm{AS}i} - F_{\mathrm{SD}i}\,; \quad \mathrm{d}d/\mathrm{d}t = \sum_i F_{\mathrm{SD}i}$$

O_i ist die wirksame jährlich eisfreie Austauschfläche relativ zur gesamten Boxfläche. Die Meereis-Öffnungsanteile vor der Schelfeiskorrektur betragen anfangs 0,60 im südlichen und 0,50 im nördlichen Polarband; bis Jahr 200 nimmt jeweils 40 Prozent des zunächst durch Meereis gesperrten Anteils am Austausch teil. Der wirksame Anteil O_i ist zusätzlich mit (1 − Schelffläche/Meeresfläche) multipliziert; im südlichen Band beträgt er anfangs deshalb rund 0,5576. Außerhalb der Polarboxen gilt O = 1. Schwimmende antarktische Schelfe bleiben als eigener Flächenanteil gesperrt. Diese vereinfachten Eisannahmen werden als Modellgrenze ausgewiesen, nicht als ausgerechnete Eisprognose.

Am Anfang sind alle Kohlenstoffanomalien null und c_{wi} = 300 ppm. Dies verhindert einen künstlichen Einschwingstoß durch die räumlich verschiedenen Anfangstemperaturen. Es ist eine Gleichgewichtsannahme des Anomalienmodells. Reale ungestörte Ozeane besitzen zugleich Regionen natürlicher Ausgasung und Aufnahme; deren stationäre Gegenflüsse werden hier nicht einzeln rekonstruiert.

6 Permafrost Gletschervorfelder und Gesteine

Der geerbte Permafrostverlust von 40 GtC war bereits auf 2 K globale Erwärmung bezogen. Er darf deshalb nicht nochmals mit der gesamten polaren Verstärkung multipliziert werden. Nur Änderungen gegenüber dem festgelegten räumlichen Referenzmuster verändern diesen Verlust zusätzlich:

$$A_{\mathrm{PF}} = 0{,}25 r_{\mathrm{L,30–60N}} + 0{,}75 r_{\mathrm{L,60–90N}}$$

$$E_{\mathrm{PF}}(t) = P_{\mathrm{F}}(\Delta T/2)[A_{\mathrm{PF}}/A_{\mathrm{PF,ref}}] H_{100}(t)$$

$$H_\tau(t) = [t - \tau(1 - \exp(-t/\tau))]/[200 - \tau(1 - \exp(-200/\tau))]$$

Die 25/75-Verteilung ist eine vereinfachte nördliche Quellgewichtung. Zentral ist das Verhältnis der beiden A-Werte gleich eins, sodass nach 200 Jahren unverändert 40 GtC freigesetzt werden. Bei unsicherem Erwärmungsmuster ändert es sich mit. Der 100-jährige Verzögerungsansatz bleibt erhalten. Abruptes Tauen, thermokarstbedingte Wasseränderungen und die getrennte Methanentwicklung sind weiterhin nicht eigenständig simuliert.

Zusätzlicher Kohlenstoff in neu besiedelten Gletschervorfeldern bleibt als kleiner Term $B_G(t) = 0{,}18\ (\Delta T/2)(t/200)^2$ GtC enthalten. Er umfasst neue Fläche; die Temperaturantwort bereits eisfreier Flächen steckt dagegen im Vegetationsmodell. Waldgrenzen, Nährstoffmobilisierung, Sukzession und Erosion werden nicht als eigene Flächenmodelle gelöst. Eine große zusätzliche Wälder- oder Bodensenke allein aus Eisrückzug wird daher nicht unterstellt.

Die kleinen geochemischen Änderungen werden über die eisfreien Landanteile ω_i gewichtet. Die bisherige Gesteinsoxidation und Verwitterung lauten mit lokalen Temperaturzunahmen:

$$\Delta R = 0{,}068 \sum_i \omega_i\, [\exp\{\ln(2{,}2)\, \theta_{\mathrm{L}i}/10\} - 1]$$

$$\Delta W = 0{,}060\{\sum_i \omega_i \exp(0{,}080 \theta_{\mathrm{L}i})(c/300)^{0{,}30} - 1\}$$

$$\mathrm{d}G/\mathrm{d}t = \Delta W - \Delta R$$

Die Flüsse sind in GtC/a angegeben. Positive G bedeutet zusätzliche geochemische Speicherung. Karbonatkompensation, Änderungen der Erosion und langfristige tektonische Verschiebungen werden über 200 Jahre nicht explizit weiterentwickelt. Ihre unveränderten Hintergrundanteile gehören zum Anfangsgleichgewicht.

7 Geschlossene Kohlenstoffbilanz

Die atmosphärische Änderung folgt aus allen Reservoiränderungen. Vegetationszuwachs ist eine Entnahme, Boden- und Permafrostverlust sind Abgaben; der Ozean kann je nach Druckdifferenz aufnehmen oder abgeben:

$$2{,}12\,\mathrm{d}c/\mathrm{d}t = -\sum_i (\mathrm{d}V_i/\mathrm{d}t + \mathrm{d}S_i/\mathrm{d}t) + \mathrm{d}E_{\mathrm{PF}}/\mathrm{d}t - \mathrm{d}B_{\mathrm{G}}/\mathrm{d}t - \sum_i F_{\mathrm{AS}i} - \mathrm{d}G/\mathrm{d}t$$

$$2{,}12(c - 300) + \sum_i s_i + d + \sum_i (\Delta V_i + \Delta S_i) - E_{\mathrm{PF}} + B_{\mathrm{G}} + G = 0$$

Das Zusatzetikett V_C wird nicht noch einmal als eigener Kohlenstoffbestand addiert. Die Bilanzgleichung gilt in jedem Parameterlauf. Bei ausbleibender Erwärmung bleibt das Modell bei 300 ppm; räumliche Temperaturunterschiede allein erzeugen aus dem gesetzten Ausgangsgleichgewicht keinen zusätzlichen Kohlenstoff.

8 Eingangsunsicherheiten und ihre Bedeutung

Die in Studie II untersuchte Spannweite von 288,7 bis 428,0 ppm war eine Kombination zulässiger Parameterszenarien. Sie besaß keine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz benötigt dagegen Varianzen und Kovarianzen der Eingänge. Diese werden hier ausdrücklich zusätzlich festgelegt. Es handelt sich um eine Typ-B-Bewertung aufgrund erklärter Modellbereiche, nicht um aus Messwiederholungen gewonnene Standardfehler [10, 11].

Für die primitiven Parameter wird innerhalb der folgenden Grenzen eine Gleichverteilung angenommen. Diese Wahl gibt jedem Teilintervall gleicher Breite dasselbe Gewicht. Die Rechtecke sind untereinander unabhängig; die daraus zusammengesetzten hydrologischen Koeffizienten sind es ausdrücklich nicht. Empirisch unbekannte Zusammenhänge zwischen Landparameter, Permafrost, Düngung und den räumlichen Mustern werden nicht mit erfundenen Korrelationen belegt. Das bleibt eine Bedingung der Rechnung.

$$\mu_j = (a_j + b_j)/2\,; \quad u_j = (b_j - a_j)/\sqrt{12}$$

8.1 Geerbte Prozessbereiche und Wasser

Eingangsgröße	Referenz	Typ-B-Bereich	Mittelwert / Standardunsicherheit
Landanker g [GtC/K]	45	10 bis 90	50 / 23,09
Permafrost P_F [GtC]	40	10 bis 80	45 / 20,21
CO_2-Exponent η [1]	0,3	0,15 bis 0,6	0,375 / 0,1299
Tiefenaustausch Q [Sv]	50	20 bis 100	60 / 23,09
Revelle-Faktor R [1]	10	8 bis 12	10 / 1,15
Neuer Gletscherflächenbestand [GtC]	0,18	0,05 bis 0,5	0,275 / 0,1299

Eingangsgröße	Referenz	Typ-B-Bereich	Mittelwert / Standardunsicherheit
Bodenretention ρ [1]	1	0 bis 1	0,5 / 0,28868
Regen h_P [K^{-1}]	0,024	0,015 bis 0,035	0,025 / 0,00577
Verdunstungsanspruch h_D [K^{-1}]	0,03	0,01 bis 0,05	0,03 / 0,01155
Wasserwirkung Produktion ε_N [1]	0,5	0 bis 1	0,5 / 0,28868
Wasserwirkung Boden ε_R [1]	0,25	0 bis 0,5	0,25 / 0,14434

8.2 Zusätzliche räumliche und thermische Bereiche

Eingangsgröße	Referenz	Typ-B-Bereich	Mittelwert / Standardunsicherheit
Land/Meer-Verhältnis L [1]	1,4	1,2 bis 1,6	1,4 / 0,11547
Polverstärkung p [1]	1	0 bis 2	1 / 0,57735
Ausgangskontrast B [1]	1	0,95 bis 1,05	1 / 0,02887
Polare SST-Antwort χ [1]	0,5	0,2 bis 0,8	0,5 / 0,17321
Regionale NPP-Form ζ [1]	0,5	0 bis 1	0,5 / 0,28868
Bodenverteilung λ [K^{-1}]	0,04	0 bis 0,08	0,04 / 0,02309
NPP-Verteilungsneigung z [1]	0	-0,5 bis 0,5	0 / 0,28868
Ozeanparameter b_h [J/mol]	28995	27000 bis 31000	29000 / 1155

Die NPP-Verteilungsneigung z verändert die anfangs berechneten Gewichte proportional zu exp(z q_i), anschließend werden sie wieder auf eins normiert. Sie ist ein einfacher Test einer stärkeren oder schwächeren Verlagerung der Produktivität zu höheren Breiten. λ verändert die entsprechende Bodenverteilung. Beide lassen die globalen Anfangssummen unverändert. Die Temperaturen, Gewichte, Umsatzzeiten und Referenzkoeffizienten werden bei jeder Parameteränderung konsistent neu gebildet.

Der Bereich von b_h ist bewusst weiter als die reine Messfitunsicherheit eines einzelnen Meerwasserexperiments. Er soll einen Teil der räumlichen und chemischen Repräsentationsunsicherheit abdecken. Auch die Bereiche für L, p, B, χ, ζ, λ und z sind erklärte Modellspannen; sie sind keine veröffentlichten Konfidenzintervalle für eine solar erwärmte Erde ohne Menschen.

Die Referenzparameter sind nicht überall die Verteilungsmitten. Beispielsweise stehen g = 45 gegenüber μ_g = 50, η = 0,30 gegenüber μ_η = 0,375 und ρ = 1 gegenüber μ_ρ = 0,5. Deshalb sind der vergleichbare Referenzlauf und der Unsicherheitsbezugswert zwei verschiedene Kurven. Das Unsicherheitsband darf nicht ohne Weiteres um den Referenzwert verschoben werden.

8.3 Hydrologische Kovarianzen

Die vier Wasserkombinationen a_{NP}, a_{ND}, a_{RP} und a_{RD} teilen sich Eingangsgrößen. Wer ihre Fehler unabhängig addiert, zählt gemeinsame Ursachen falsch. Zusätzlich sind Produkte zweier unsicherer Größen nicht durch die Produktregel erster Ordnung allein vollständig beschrieben. Für unabhängige X und Y gilt exakt:

$$\mathrm{Var}(XY) = \mu_X^2\mathrm{Var}(Y) + \mu_Y^2\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)$$

Deshalb werden die exakten ersten und zweiten Momente der vier Produkte aus den primitiven Rechtecken berechnet und erst danach in die Fehlerfortpflanzung eingesetzt. In der Reihenfolge (a_{NP}, a_{ND},

a_{RP}, a_{RD}) ist der Mittelwert (0,0125; 0,0125; 0,00625; 0,00625) K^{-1}. Die folgende Matrix enthält die Kovarianzen in Einheiten von 10^{-6} K^{-2}:

	a_{NP}	a_{ND}	a_{RP}	a_{RD}
a_{NP}	63,19444	52,08333	4,16667	0,00000
a_{ND}	52,08333	82,94753	0,00000	11,57407
a_{RP}	4,16667	0,00000	15,79861	13,02083
a_{RD}	0,00000	11,57407	13,02083	20,73688

Auch die Wahrscheinlichkeitsannahme zum Wasser ändert sich gegenüber einer gleichverteilten Differenz δh: Die unabhängigen Rechtecke für h_P und h_D ergeben eine trapezförmige Verteilung ihrer Differenz. Deren äußere Grenzen bleiben −0,035 bis +0,025 K^{-1}, ihre Varianz beträgt aber 0,0001667 statt 0,0003000 K^{-2}. Eine Änderung der Bandbreite gegenüber einer statistisch nachträglich interpretierten Studie-II-Box wäre daher nicht allein ein Erfolg der räumlichen Verfeinerung.

9 Fehlerfortpflanzung über die gesamte Zeit

Für jedes Jahr wird die atmosphärische Konzentration als Funktion der Modellparameter geschrieben: c(t) = F_t(p). Die numerisch integrierte Dynamik ist damit Teil dieser Funktion. Die Sensitivitätsmatrix enthält die Änderung des Ergebnisses gegenüber jeder Eingangsgröße, ausgewertet an den Parametermittelwerten μ. Das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz einschließlich Kovarianzen lautet [10]:

$$J_j(t) = \partial F_t / \partial p_j|_{p=\mu}$$

$$u_c^2(t) = J(t)\,\Sigma_p\,J(t)^{\mathrm{T}}$$

$$u_c^2(t) = \sum_j J_j^2(t) u_j^2 + 2\sum_{j<k} J_j(t) J_k(t) \mathrm{Cov}(p_j, p_k)$$

Als untere und obere Kurve werden die erweiterten Unsicherheitsgrenzen mit k = 2 definiert:

$$c_-(t) = F_t(\mu) - 2u_c(t)\,; \quad c_+(t) = F_t(\mu) + 2u_c(t)$$

Die Ableitungen entstehen aus zentralen Differenzen vollständiger Modellläufe. Der erste Differenzenschritt beträgt 0,001 der jeweiligen Parameterbreite; anschließend wird er halbiert. Die verwendeten Sensitivitäten stammen aus dieser feineren Rechnung. J umfasst somit die Auswirkungen auf Ausgangspools, biologische Antwort, räumliche Temperaturverteilung und die weitere zeitliche Kopplung zwischen Atmosphäre, Land und Ozean.

Die genaue globale Temperaturvorgabe wird bei jeder Störung neu normiert. Die zonalen Temperaturen sind deshalb nicht zwölf unabhängige Zufallsgrößen. Für eine additive Normierung wäre die Projektionsmatrix P = I−1w^{T} und die entsprechende Kovarianz PΣP^{T} maßgebend. Hier wird dieselbe Nebenbedingung direkt durch wenige unsichere Musterparameter und ihre anschließende Normierung eingehalten. Die globale Mitteltemperatur erhält keine künstliche Zusatzunsicherheit.

Das Anfangs-CO_2 ist exakt gesetzt. Deshalb gilt $u_c(0) = 0$ und beide Grenzen beginnen bei 300 ppm. Die Unsicherheit wächst mit der Wirkung der unsicheren Parameter. Die Fehler verschiedener Jahre sind miteinander verbunden:

$$\mathrm{Cov}[c(t), c(s)] = J(t)\,\Sigma_p\,J(s)^{\mathrm{T}}$$

Das gezeichnete Band ist punktweise. Es ist keine zugesicherte gemeinsame Überdeckung der vollständigen 200-jährigen Kurve. Die häufige Zuordnung k = 2 zu ungefähr 95 Prozent setzt eine

ausreichend normalähnliche Ergebnisverteilung und eine brauchbare Standardunsicherheit voraus [12]. Hier wird diese Näherung zusätzlich am nichtlinearen Modell geprüft; eine empirische 95-Prozent-Gewissheit über die wirkliche Modell-Erde wird daraus nicht abgeleitet.

10 Ergebnisse und zeitabhängige Schranken

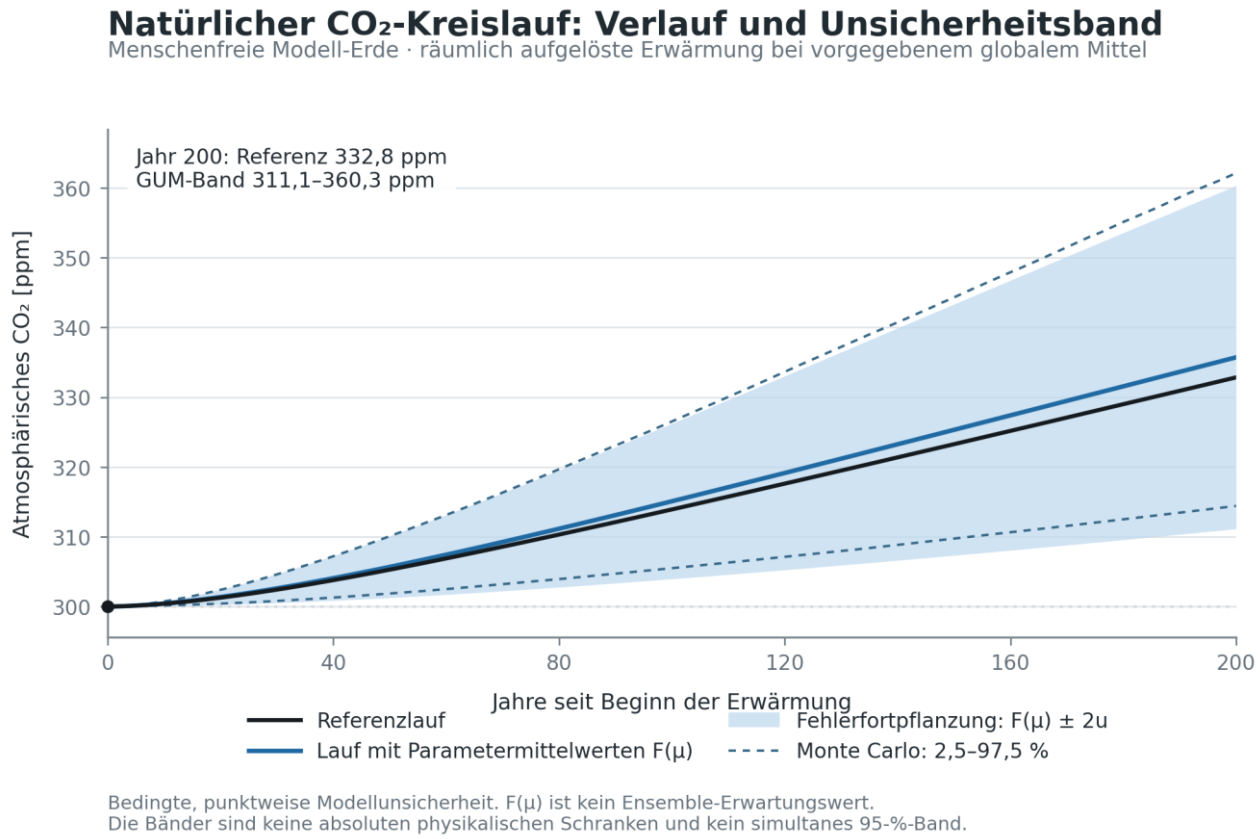


Abbildung 2. CO_2-Verlauf und punktweise Fehlerschranken. Schwarz: Referenzparameter. Blau: $F_t(\mu)$. Hellblau: Fehlerfortpflanzung mit k = 2. Gestrichelt: 2,5- und 97,5-Prozent-Quantile der nichtlinearen Verteilungsprüfung unter denselben erklärten Eingangsannahmen.

Jahr	Referenz c(t)	Bezugswert $F_t(\mu)$	Untere bis obere Grenze
0	300,00 ppm	300,00 ppm	300,00–300,00 ppm
25	301,82 ppm	301,96 ppm	300,40–303,52 ppm
50	305,29 ppm	305,69 ppm	301,27–310,12 ppm
100	313,92 ppm	315,09 ppm	303,97–326,22 ppm
150	323,27 ppm	325,33 ppm	307,33–343,32 ppm
200	332,85 ppm	335,72 ppm	311,14–360,30 ppm

Das zentrale Referenzergebnis lautet c(200) = 332,85 ppm. Der Unsicherheitsbezugswert lautet dagegen $F_{200}(\mu)$ = 335,72 ppm. Zu diesem zweiten Wert gehört die Angabe ±24,58 ppm für k = 2. Die Grenze von 311,1 bis 360,3 ppm ist somit mathematisch konsistent zentriert. Ihre Gesamtbreite beträgt 49,2 ppm.

10.1 Nichtlineare Gegenprüfung

Zur Kontrolle der Taylor-Näherung wurden 8192 Sobol-Punkte als numerische Integration der erklärten Eingangsverteilungen verwendet. Dabei werden die vier ursprünglichen Wassergrößen gezogen und ihre

Produkte gebildet; die Produkte werden nicht unabhängig aus künstlichen Rechtecken entnommen. Die Verteilungsfortpflanzung ergänzt das Fehlerfortpflanzungsgesetz gemäß dem Grundgedanken von JCGM 101 [13].

Größe bei Jahr 200	Lineare Rechnung	Nichtlineare Prüfung	Bewertung
Bezugswert beziehungsweise Mittel	335,72 ppm	336,00 ppm	Mittelwertverschiebung 0,28 ppm
Standardunsicherheit	12,29 ppm	12,61 ppm	2,6 % größer
Intervall	311,1–360,3	314,4–362,1	k = 2 gegenüber 2,5–97,5 %

Die Standardabweichungen unterscheiden sich nur um rund 2,6 Prozent. Die lineare Fehlerfortpflanzung beschreibt die Streuung unter den gewählten Annahmen daher brauchbar. Die Quantile zeigen zugleich eine mäßige Asymmetrie: Sie müssen nicht mit einem symmetrischen Band um $F_t(\mu)$ zusammenfallen. Rund 95,7 Prozent der berechneten Endpunkte liegen im k=2-Band. Das ist eine Eigenschaft dieses Rechenensembles, keine beobachtete Häufigkeit möglicher Erdentwicklungen.

Eine Halbierung auf 4096 Sobol-Punkte verändert den Endmittelwert nur um etwa 0,001 ppm und die Standardabweichung um 0,003 ppm; die Quantile verändern sich um etwa 0,1 beziehungsweise 0,2 ppm. Für die wissenschaftliche Interpretation sind deshalb gerundete Angaben angemessen. Die zusätzlichen Dezimalstellen in den Datendateien dienen der Reproduzierbarkeit.

10.2 Woher die Unsicherheit kommt

Gruppe	Varianzbeitrag	Anteil	Einordnung
Land-Klimaantwort g	93,00 ppm²	61,56 %	Gruppenbeitrag
Wasser einschließlich Kovarianzen	17,62 ppm²	11,66 %	Gruppenbeitrag
Permafrostmenge	17,37 ppm²	11,50 %	Gruppenbeitrag
CO_2-Wachstumsantwort η	13,00 ppm²	8,61 %	Gruppenbeitrag
Zusätzliche Bodenretention	3,43 ppm²	2,27 %	Gruppenbeitrag
Land/Meer-Erwärmungsverhältnis	2,62 ppm²	1,73 %	Gruppenbeitrag
Übrige Eingänge	4,03 ppm²	2,67 %	Zusammengefasst

Die räumlichen Anteile und Temperaturen sind nun nachvollziehbarer gewichtet. Trotzdem dominiert die Unsicherheit der biologischen Nettoantwort. Ein genaueres Küstenpolygon kann diese Wissenslücke nicht schließen. Die positive Gruppenvarianz des Wassers enthält den vollständigen 4×4-Kovarianzblock; positive und negative Einzel-Kovarianzterme werden nicht als voneinander unabhängige prozentuale Beiträge dargestellt.

11 Physikalische Einordnung der Referenzrechnung

Reservoir	Änderung nach 200 a	Richtung	Bedeutung
Atmosphäre	+69,63 GtC	Aufnahme	Entspricht +32,85 ppm
Ozean gesamt	+13,46 GtC	Nettoaufnahme	Trotz warmer Oberfläche
Vegetation	+21,84 GtC	Aufbau	Wachstum und CO_2-Wirkung

Reservoir	Änderung nach 200 a	Richtung	Bedeutung
Regulärer Boden	-65,15 GtC	Verlust	Atmung übersteigt Eintrag
Permafrost	-40,00 GtC	Verlust	Zusätzlicher gefrorener Pool
Neue Gletschervorfelder	+0,18 GtC	Aufbau	Kleiner Zusatzspeicher
Geologischer Nettospeicher	+0,039 GtC	Aufbau	Verwitterung minus Oxidation

Insgesamt verlieren Vegetation und regulärer Boden zusammen 43,31 GtC; mit Permafrost sind es 83,31 GtC. Davon verbleiben 69,63 GtC in der Atmosphäre, 13,46 GtC gehen netto in den Ozean und rund 0,22 GtC in neue Gletscherflächen und den geologischen Nettospeicher. Die Bilanz schließt. Pflanzenwachstum allein bestimmt daher nicht das Vorzeichen der gesamten Landantwort: Der Vegetationszuwachs tritt hier gleichzeitig mit einem größeren Bodenverlust auf.

Der Ozean verliert anfangs leicht Kohlenstoff, weil zunächst die Erwärmung überwiegt. Später führt das gestiegene atmosphärische CO_2 trotz wärmeren Wassers zur Nettoaufnahme. Eine pauschale Regel „wärmerer Ozean bedeutet im Gesamtergebnis immer eine CO_2-Quelle“ wäre für dieses gekoppelte Modell falsch.

Vergleichsvariante	Endwert CO_2	Differenz zur Referenz	Was geprüft wird
Studie II Referenz	333,8 ppm	+0,96 ppm	Bisherige globale Beschreibung
Keine regionale Miami-Korrektur	334,8 ppm	+1,91 ppm	$\zeta = 0$
Volle regionale Miami-Korrektur	330,5 ppm	-2,36 ppm	$\zeta = 1$
Keine Polverstärkung	331,8 ppm	-1,03 ppm	$p = 0$ einschließlich PF-Reaktion
Stärkere Polverstärkung	333,6 ppm	+0,73 ppm	$p = 2$ einschließlich PF-Reaktion
Ohne CO_2-Wachstumswirkung	347,4 ppm	+14,55 ppm	$\eta = 0$, eigener Strukturtest

Diese Einzelvarianten sind Sensitivitätsrechnungen, keine addierbaren Beiträge. Ihre Wirkungen beeinflussen sich über die gemeinsame Atmosphäre. Die geringe Differenz zwischen den beiden Referenzmodellen beweist außerdem nicht, dass räumliche Verteilung grundsätzlich unwichtig wäre. Beispielsweise ergibt überall gleiche Luft-Erwärmung mit $L = 1$ und $p = 0$ hier 326,1 ppm. Dabei bleibt die polare SST-Dämpfung bestehen und die Permafrostfreisetzung sinkt auf 22,2 GtC; es ist also ein gemeinsam verändertes Klimamuster.

12 Aussagegrenzen und weitere Verbesserung

Belastbar innerhalb des erklärten Modells sind die Kugelgewichtung, die Einhaltung der Temperaturvorgabe, das stationäre Anfangsgleichgewicht, die geschlossene Kohlenstoffbilanz und die korrekt kovariante Fehlerrechnung. Weniger belastbar sind die Zahlenwerte der langfristigen biologischen Antwort und die angenommene Wahrscheinlichkeit ihrer Parameter. Die dritte Studie verbessert vor allem die räumliche Konsistenz; sie wird dadurch noch nicht zu einer empirisch validierten Vorhersage des gesamten Erdsystems.

Erstens bleibt die Klimadynamik vorgegeben. Land-Meer-Kontrast, Polarverstärkung und Meereisreaktion werden parametrisiert. Eine steigende Sonnenleistung legt für sich allein weder das örtliche Niederschlagsmuster noch Bewölkung, direkte und diffuse photosynthetisch aktive Strahlung fest. Die unmittelbare Lichtwirkung auf NPP, saisonale Unterschiede und Extremereignisse fehlen. Ein nächster

Ausbau müsste ein solares Strahlungs- und Energiebilanzmodell mit den regionalen Wasserbilanzen koppeln.

Zweitens ersetzt die Bodenrekonstruktion keine Karte natürlicher Speicher. Global V_o, S_o, NPP_o, der effektive Q_{10}, grundlegende Umsatzannahmen und die Temperaturrepräsentation des Bodens bleiben fest. Nährstoffverfügbarkeit, echte Primingeffekte, Schneedeckenisolierung, mikrobielle Anpassung, natürliche Feuer sowie Stürme und Schädlinge sind nicht als eigenständige unsichere Prozesse enthalten. Die gewählten g-, η-, Wasser- und Verteilungsbereiche decken davon nur einen Teil indirekt ab.

Drittens bleiben Permafrost und neue Gletscherflächen stark zusammengefasst. Flächenhafte Taugrenzen, abrupter Kohlenstoffverlust, Erosion, Torfbildung, Feuchtgebiete, Methanproduktion und Methanoxidation sind nicht getrennt gelöst. Die Abnahme von Eisschilden wird nicht allein aus einer globalen 2-K-Erwärmung berechnet. Die zusätzliche Gletschersenke ist eine begrenzte Schätzgröße; der neue Ansatz behauptet keine großflächige sofortige Waldentstehung auf vormals vereistem Land.

Viertens bleibt der Ozean grob. Meeresschichtung, Tiefenwasserbildung, regionale Strömungen, marine Biologie, Nährstofftransport, Sauerstoffänderungen und Karbonatkompensation fehlen als eigenständige dynamische Rückkopplungen. Die flächenproportionale Tiefenbelüftung und die festgelegte Meereis-Freigabe sind Strukturannahmen. Ein vollständiges GUM-Band für sämtliche denkbaren Modellfehler ist daher nicht berechnet worden.

Die ausgewiesenen unteren und oberen Kurven sind folglich die Fehlergrenzen der angegebenen parametrisierten Modellrechnung. Eine absolute maximale Variationsbreite aller möglichen natürlichen Erdentwicklungen kann das Fehlerfortpflanzungsgesetz nicht liefern. Dazu müssten auch alle relevanten strukturellen Möglichkeiten und ihre Grenzen bekannt sein. Die wesentlich breitere Szenarienspanne aus Studie II wird durch das neue k=2-Band nicht widerlegt oder ersetzt.

Unter den getroffenen Referenzannahmen bleibt die Aussage ein natürlicher Anstieg um etwa 33 ppm bei 2 K Erwärmung in 200 Jahren. Die auf Parametermittelwerte bezogene Fehlerrechnung ergibt etwa 336 ± 25 ppm. Die regional genauere Gewichtung verschiebt den bisherigen zentralen Endwert um knapp ein ppm; die Unsicherheit der Landprozesse ist deutlich größer als diese Verschiebung.

13 Reproduzierbarkeit und numerische Prüfung

Der mitgelieferte Code enthält das vollständige Differentialgleichungsmodell, die geografischen Eingangsdaten, die Parametermittelwerte und Kovarianzen, jährliche Zeitreihen, die Sensitivitätsmatrix sowie alle 8192 Parameterkombinationen und Konzentrationskurven. Die Referenz wird mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung bei 0,25 Jahren Zeitschritt integriert. Die Rasterintegrale werden in 0,005-K-Schritten tabelliert und linear interpoliert. Für das Ensemble wird nur die glatte homogene g-Kalibrierung interpoliert, nicht das zonale Endergebnis.

Prüfung	Befund	Größenordnung	Aussage
Nullerwärmung	300 ppm bleiben erhalten	0 ppm Abweichung	Anfangsgleichgewicht
Kohlenstoffbilanz im Ensemble	Geschlossen	$< 1{,}3 \times 10^{-12}$ GtC	Kein künstlicher Quellterm
Globale Temperaturbedingung	In allen Läufen erfüllt	$< 5{,}4 \times 10^{-15}$ K	Korrekte Normierung
Halber Integrationsschritt	Kurven unverändert	$< 2{,}0 \times 10^{-6}$ ppm	Numerischer Fehler klein
Halber Sensitivitätsschritt	Unsicherheit stabil	$< 5{,}5 \times 10^{-7}$ ppm	GUM-Ableitungen stabil
Direkte Kalibrierungskontrolle	Vier Punkte über g-Bereich	$< 3{,}6 \times 10^{-10}$ ppm	Ensembleinterpolation geprüft

Die numerischen Rundungs- und Integrationsfehler sind damit viele Größenordnungen kleiner als die Modellunsicherheit. Diese Prüfungen sind eine Kontrolle der implementierten Rechnung; sie validieren nicht die unbekannte tatsächliche Entwicklung einer menschenfreien Erde.

Reproduktion aus dem Datenpaket: zuerst python modell3.py, danach python unsicherheit3.py und python plots3.py im Verzeichnis co2_studie3 ausführen. NumPy, SciPy und Matplotlib genügen für die Modellrechnung mit den mitgelieferten Geodaten. Die optionale vollständige Rekonstruktion aus NetCDF und Küstenpolygonen benötigt zusätzlich die in der Methodendatei genannten Geobibliotheken. Prüfsummen und genaue Rohdaten-URLs sind beigefügt.

Alle externen Quellen und Datensätze wurden am 25. November 2026 geprüft. Berechnete Tabellenwerte, Modellentscheidungen, Parameterverteilungen und Ergebnisgrafiken stammen aus der vorliegenden Untersuchung; die zitierten Quellen stützen deren Datenbasis und Methoden, nicht die empirische Richtigkeit des gewählten Szenarios.

Quellen und Bezugspapiere

[1] Studie II, Modellversion 2.0, 25.11.2026. Natürlicher CO2 Kreislauf mit Pflanzenwachstum und Wasserhaushalt. Bezugspapier dieser Studienreihe; PDF, Modellcode und Ergebnisse gemeinsam bereitgestellt. Referenzendwert 333,806980 ppm. Studie I, Modellversion 1.0, wird dort dokumentiert.

[2] Natural Earth. Land, Antarctic Ice Shelves und Glaciated Areas, 1:50m Physical Vectors, Version 4.0. Verwendete Küsten-, Schelf- und Gletschermasken.
https://www.naturalearthdata.com/downloads/50m-physical-vectors/50m-land/

[3] NOAA Physical Sciences Laboratory. NCEP/NCAR Reanalysis 1, Monthly Long-Term Means 1981–2010, 2-m air temperature und precipitation rate. Daten bereitgestellt von NOAA PSL, Boulder, Colorado, USA.
https://psl.noaa.gov/data/gridded/data.ncep.reanalysis.html

[4] NOAA PSL / COBE. Monthly long-term mean sea surface temperature 1981–2010. Die exakten NetCDF-URLs stehen in geo/METHODEN_GEOGRAPHIE.txt.
https://psl.noaa.gov/thredds/dodsC/Datasets/COBE/sst.mon.ltm.1981-2010.nc.html

[5] Lieth, H. (1975). Modeling the Primary Productivity of the World. In Primary Productivity of the Biosphere, Ecological Studies 14, S. 237–263.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-80913-2_12

[6] Brun, P. et al. (2022). Global climate-related predictors at kilometer resolution for the past and future. Earth System Science Data 14, 5573–5603. Miami-Implementierung, Gleichungen 8–10.
https://doi.org/10.5194/essd-14-5573-2022

[7] Shindell, D. T., Faluvegi, G. und Schmidt, G. A. (2020). Influences of solar forcing at ultraviolet and longer wavelengths on climate. Journal of Geophysical Research Atmospheres 125, e2019JD031640.
https://doi.org/10.1029/2019JD031640

[8] Bala, G., Duffy, P. B. und Taylor, K. E. (2008). Impact of geoengineering schemes on the global hydrological cycle. PNAS 105, 7664–7669. Solare und CO_2-bedingte hydrologische Sensitivität.
https://doi.org/10.1073/pnas.0711648105

[9] Humphreys, M. P. (2024). Temperature effect on seawater fCO_2 revisited: theoretical basis, uncertainty analysis and implications for parameterising carbonic acid equilibrium constants. Ocean Science 20, 1325–1350.
https://doi.org/10.5194/os-20-1325-2024

[10] JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. Insbesondere Abschnitte 4 und 5 sowie Anhang G.
https://doi.org/10.59161/JCGM100-2008E

[11] NIST Technical Note 1297. Appendix A, Law of Propagation of Uncertainty, Gleichungen A-3 bis A-7; Abschnitt 4 zur Typ-B-Bewertung.
https://www.nist.gov/pml/nist-technical-note-1297/nist-tn-1297-appendix-law-propagation-uncertainty

[12] NIST. Expanded uncertainty and coverage factors. Voraussetzungen der näherungsweisen 95-Prozent-Zuordnung von k = 2.
https://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/coverage.html

[13] JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the GUM — Propagation of distributions using a Monte Carlo method.
https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_101_2008_E.pdf