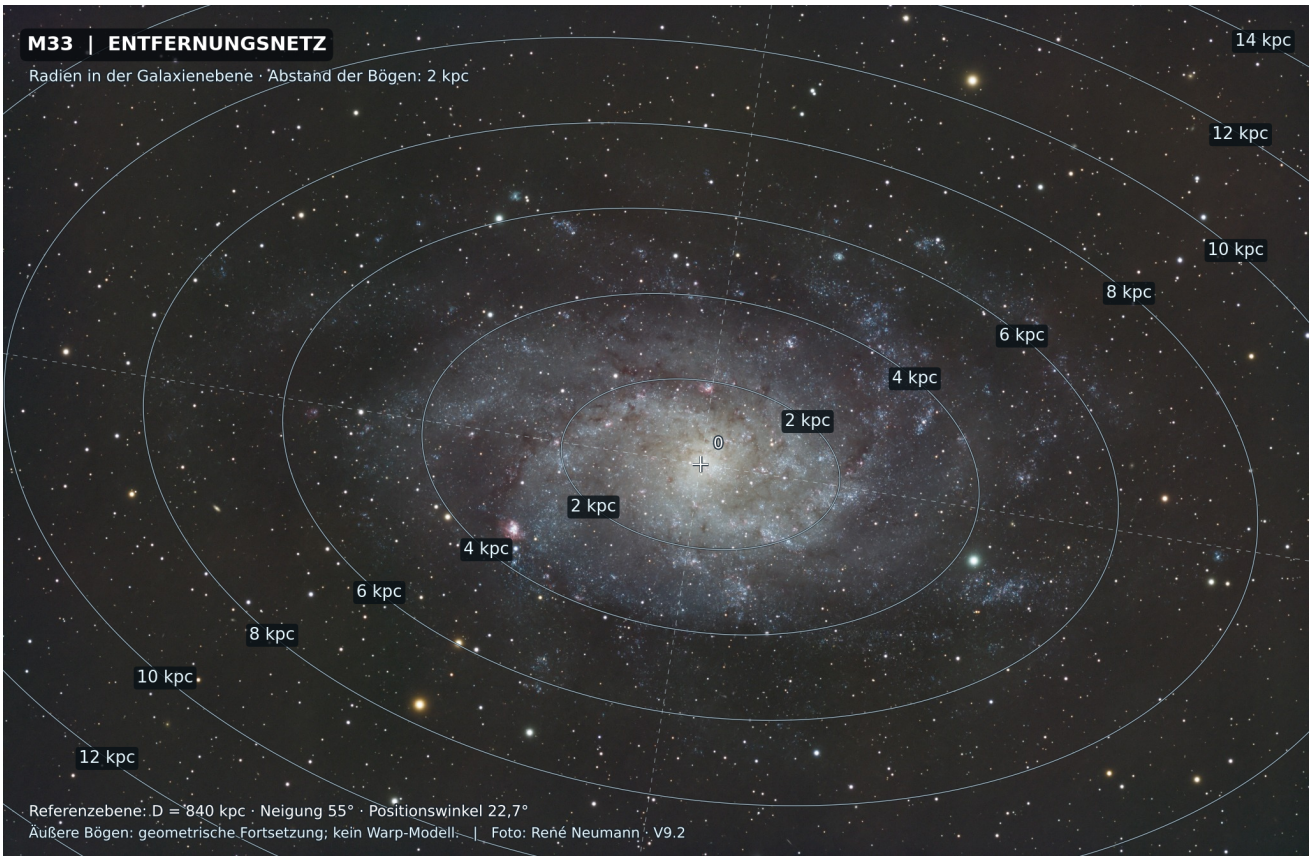
Galaxienmassen und Dunkle Materie

Methoden, Grenzen und eine Newtonsche Scheibenrekonstruktion für M33



M33 — Foto: René Neumann. Entfernungsbögen in 2-kpc-Schritten; Referenzebene der inneren Scheibe. Erläuterung in Anhang C.

Massenbestimmung aus der Physik einzelner Galaxien. Rotationskurven, baryonische Inventare, räumliche Kräfte und die Aussagekraft zusätzlicher gravitativer Masse.

Dr. Klaus Retzlaff und Proto

Eine wissenschaftliche Kooperation von Mensch und KI
KI-geführtes Forschungsinstitut von Dr. Klaus Retzlaff
mypublicationscience.com/ki-forschungsinstitut/

Fachartikel · Version 9.2 · 23. November 2026

Zusammenfassung

Galaxien werden nicht gewogen, indem man ihr Licht unmittelbar in Kilogramm umrechnet. Ihre Masse wird aus mehreren, jeweils bedingten Schlussketten erschlossen: aus der Bewegung von Gas und Sternen, aus der Ablenkung von Licht und aus der Strahlung bestimmter Materiephasen. Diese Arbeit erklärt die physikalischen Grundlagen, die wesentlichen Messprobleme und die Grenzen der Schlussfolgerung von einem Gravitationsfeld auf eine Materieverteilung. Die Dynamik von Galaxienhaufen wird vollständig ausgeschlossen. Auch kosmologische Argumente werden nicht als zusätzliche Beweisstützen verwendet. Gegenstand sind einzelne Galaxien und vergleichende Stichproben solcher Galaxien.

Im Mittelpunkt steht M33. Die Arbeit verbindet eine freie Newtonsche Scheibenrekonstruktion, den unabhängigen Vergleich mit baryonischen Materieprofilen und die Minimierung der zusätzlich benötigten Masse. Ein kugelsymmetrisches Halo wird in dieser Gegenprobe nicht vorausgesetzt. Innerhalb der bisher untersuchten Modellklasse lässt sich die veröffentlichte Rotationskurve durch eine Scheibe gut wiedergeben. Die massenarme Referenzlösung V7 enthält rund $4{,}35 \times 10^{10}$ Sonnenmassen. Trotz großzügiger Skalierung der Stern- und Gasprofile bleiben etwa $2{,}83 \times 10^{10}$ Sonnenmassen, also rund 65 Prozent, stofflich nicht zugeordnet. Diese Zahlen sind Ergebnisse eines eingeschränkten Optimierungsproblems, keine modellunabhängigen Messwerte und keine universellen Untergrenzen.

Der entscheidende Befund lautet: Eine passende Scheibenrotation widerlegt die Notwendigkeit zusätzlicher Gravitation nicht; sie widerlegt lediglich deren eindeutige Zuordnung zu einer Kugel anhand der Rotation allein. Umgekehrt identifiziert eine dynamische Massendifferenz noch keine neue Teilchenart. Unabhängige Kräfte senkrecht zur Scheibe, Sternströme, Linseneffekte und die physikalische Stabilität der postulierten Materie liefern zusätzliche Prüfungen. Kaltes molekulares Gas, optisch dickes atomares Gas und schwach strahlende kompakte Körper besitzen reale Nachweislücken. Aus einer Nachweislücke folgt jedoch weder eine beliebig große verborgene Masse noch eine dauerhaft tragfähige Scheibe.

Unter Newtonscher Gravitation ist eine erhebliche Differenz zwischen beobachtungsbasierten baryonischen Massen und dynamisch erforderlicher Gravitation bei vielen Einzelgalaxien gut belegt. Ein ausgedehnter, schwach leuchtender gravitativer Anteil ist deshalb eine belastbare Arbeitshypothese. Seine genaue Geometrie und seine nichtbaryonische Natur sind damit nicht gleich stark gesichert. Modifizierte Dynamik besitzt ernstzunehmende empirische Erfolge und konkrete Spannungen mit einzelnen Datensätzen. Die hier vorgenommene Beschränkung auf Einzelgalaxien erlaubt keine belastbare numerische Gesamtwahrscheinlichkeit für die Dunkle-Materie-Hypothese.

Leseschlüssel: „beobachtet“ bezeichnet eine Messgröße oder deren dokumentierte Reduktion; „erschlossen“ bezeichnet eine unter angegebenen Annahmen aus Messgrößen abgeleitete Größe. „Modell“ bezeichnet eine ausdrücklich angenommene Geometrie, Umrechnung oder Dynamik. Keine aus einer Galaxiensimulation abgeleitete Dichte wird als Messung der baryonischen Materie eingesetzt.

Inhalt

Zusammenfassung . . . 2

Inhalt . . . 3

1. Fragestellung, Begriffe und Beweismaß . . . 4

2. Was die Gravitation aus Bewegungen erschließen lässt . . . 5

3. Wie aus Spektren eine Rotationskurve wird . . . 7

4. Unabhängige Zugänge innerhalb einzelner Galaxien . . . 9

5. Baryonische Masse: Messsignal und Umrechnungsmodell . . . 11

6. M33 als Prüfobjekt: Daten, Reichweite und Zuordnung . . . 13

7. Dynamische Dichterekonstruktion und Baryonenvergleich . . . 14

8. M33 mit möglichst geringer Zusatzmasse: das Problem V7 . . . 16

9. Ergebnisse der Minimalmassenrechnung und ihre Reichweite . . . 18

10. Gleichgewicht und Stabilität: notwendige Zusatzbedingungen . . . 21

11. Wie viel gewöhnliche Materie könnte übersehen werden? . . . 23

12. Einzelgalaxien als Test der Dunklen-Materie-Hypothese . . . 25

13. Evidenzbilanz unter dem Ausschluss von Galaxienhaufen . . . 28

14. Weiterführende Prüfung an M33 . . . 29

15. Schlussfolgerungen . . . 29

Anhang A. Eine exakt flach rotierende Newtonsche Scheibe . . . 31

Anhang B. Mittelungen, Einheiten und Reproduzierbarkeit . . . 31

Anhang C. Das Entfernungsnetz der M33-Aufnahme . . . 33

Literatur und dokumentierte Rechenstudien . . . 35

1. Fragestellung, Begriffe und Beweismaß

Die Ausgangsfrage ist bewusst offen: Wie viel Masse verlangt die Bewegung einer Galaxie, wenn man die bekannte Gravitation anwendet, und wie viel davon lässt sich unabhängig als gewöhnliche Materie identifizieren? Erst danach stellt sich die Frage, ob der Rest ein ausgedehntes Halo, eine zusätzliche Scheibe, eine bisher übersehene baryonische Phase oder ein Hinweis auf eine andere Dynamik sein könnte. Diese Reihenfolge verhindert, dass die gesuchte Antwort bereits in der Parametrisierung steckt.

„Baryonisch“ bedeutet in diesem Zusammenhang gewöhnliche Materie: Sterne, Sternreste, Gas, Staub und größere Körper, deren Masse überwiegend von Protonen und Neutronen stammt. Elektronen gehören zwar nicht zu den Baryonen, werden in der astronomischen Bilanz dieser Materie selbstverständlich mitgeführt. „Dunkel“ kann dagegen zunächst nur bedeuten, dass ein gravitativer Anteil mit den verwendeten Strahlungsdiagnosen nicht ausreichend erfasst wird. Der Fachbegriff Dunkle Materie meint gewöhnlich einen zusätzlichen, überwiegend nichtbaryonischen gravitativen Bestandteil. Beide Bedeutungen dürfen nicht stillschweigend gleichgesetzt werden.

Eine Hypothese wird belastbarer, wenn sie voneinander verschiedene Messungen mit denselben physikalischen Parametern erklärt. Eine einzelne Kurve mit vielen frei wählbaren Dichtewerten nachzubilden, ist ein schwächerer Test. Ebenso wenig genügt es, eine theoretische Alternative nur deshalb zurückzuweisen, weil sie von einem verbreiteten Modell abweicht. Eine verborgene Scheibe wird deshalb als ernsthafte Gegenhypothese behandelt und auf ihre messbaren Folgen geprüft.

Diese Arbeit enthält keine neue Reduktion von Radiodatenwürfeln und keine neue selbstgravitierende N-Körper-Simulation. Sie prüft und erklärt die archivierten Rechenstudien V5 bis V8 [2–5], ergänzt analytische Herleitungen und stellt sie geprüfter Fachliteratur gegenüber. Neu sind die zusammenhängende Beurteilung, die didaktischen Ableitungen und die für diese Ausgabe erzeugten Abbildungen. Der numerische M33-Fall beruht weiterhin auf der in V5–V7 verwendeten Rotationstabelle von Corbelli et al. [6].

Welche Masse ist gemeint?

Eine Masse ohne Angabe des eingeschlossenen Raumes ist unvollständig. M innerhalb einer Kugel ist etwas anderes als die Masse in einem Zylinder der Galaxienscheibe. Eine auf 23 Kiloparsec begrenzte Bestimmung kann nicht unmittelbar mit einer bis weit außerhalb der Messung extrapolierten „Virialmasse“ verglichen werden. Der Virialradius wird über eine konventionelle mittlere Dichte definiert; seine Masse ist bei einer optisch und radioastronomisch viel kleiner vermessenen Galaxie wesentlich modellabhängig.

R bezeichnet den Abstand von der Rotationsachse in der Scheibenebene, z die Höhe über dieser Ebene und r den kugelförmigen Abstand. Ein Parsec entspricht rund 3,26 Lichtjahren; ein Kiloparsec (kpc) sind tausend Parsec. M☉ bezeichnet eine Sonnenmasse. Die Raumdichte ρ wird beispielsweise in M☉/pc³ angegeben, die Flächendichte Σ in M☉/pc². Sie sind nicht austauschbar.

$$\Sigma(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(R, z)\, dz, \qquad M_{\mathrm{cyl}}(<R) = 2\pi \int_0^R \Sigma(s)\, s\, ds \tag{1}$$

Die erste Beziehung summiert die Masse längs der Höhe, die zweite summiert diese Flächendichte über kreisförmige Ringe. Die Ringfläche ist 2πs ds. Ein Vergleich zwischen

dynamisch rekonstruierter und strahlungsbasiert erschlossener Materie muss dieselbe räumliche Mittelung verwenden. Gerade im Außenbereich kann die Dichte ausgewählter heller Gasflecken deutlich größer sein als der Mittelwert über einen vollständigen Ring.

2. Was die Gravitation aus Bewegungen erschließen lässt

2.1 Vom Kraftgesetz zur Kreisgeschwindigkeit

Das Newtonsche Gravitationspotential Φ ist die potentielle Energie pro Masseneinheit. Sein räumliches Gefälle bestimmt die Beschleunigung. Für eine ausgedehnte Verteilung werden die Beiträge aller Massenelemente aufsummiert. Das Vorzeichen des Potentials ist bei der üblichen Wahl Φ = 0 im Unendlichen negativ.

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G\int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\, d^3x', \qquad \mathbf{g} = -\nabla\Phi, \qquad \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho \tag{2}$$

G ist die Gravitationskonstante. Der Gradient ∇Φ beschreibt Richtung und Stärke des räumlichen Potentialanstiegs; ∇² ist die Summe der zweiten räumlichen Ableitungen. Die letzte Beziehung, die Poisson-Gleichung, ist die lokale Form desselben Gravitationsgesetzes. Wichtig ist, dass sie Ableitungen in allen Raumrichtungen enthält. Eine Messung nur in der Scheibenebene liefert nicht automatisch alle diese Informationen.

Auf einer Kreisbahn bleibt der Betrag der Geschwindigkeit konstant, ihre Richtung ändert sich jedoch ständig. Dafür ist eine zum Zentrum gerichtete Beschleunigung v²/R nötig. Setzt man diese gleich der radialen Gravitationsbeschleunigung, erhält man für ein rotationssymmetrisches Potential:

$$v_c^2(R) = R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\Big|_{z=0}, \qquad \Omega(R) = \frac{v_c(R)}{R} \tag{3}$$

v_c ist die Kreisgeschwindigkeit, Ω die Winkelgeschwindigkeit. Die Masse des umlaufenden Testkörpers kürzt sich heraus. Gas, Sterne oder kompakte Körper können daher grundsätzlich dieselbe Gravitationswirkung anzeigen. Ob ihre tatsächlich gemessene mittlere Bewegung der Kreisgeschwindigkeit entspricht, ist eine zusätzliche dynamische Frage. Druck, zufällige Sternbewegungen, Spiralwellen und eine zeitlich veränderliche Geometrie können diese Gleichsetzung verändern.

2.2 Warum die Kugelformel für eine Scheibe nicht gilt

Bei exakter Kugelsymmetrie ist die Anziehung einer äußeren Kugelschale im Inneren null. Die innerhalb r liegende Masse wirkt für die radiale Kraft so, als wäre sie im Zentrum konzentriert. Nur unter dieser Voraussetzung darf man die bekannte Umkehrformel verwenden:

$$M_{\mathrm{sph}}(<r) = \frac{r\,v_c^2(r)}{G}, \qquad \rho_{\mathrm{sph}}(r) = \frac{1}{4\pi G r^2}\frac{d}{dr}\left[r v_c^2(r)\right] \tag{4}$$

Bei konstanter Geschwindigkeit folgt daraus eine Dichte proportional zu 1/r² und eine eingeschlossene Masse proportional zu r. Dies ist eine gültige Schlussfolgerung innerhalb der Kugelannahme, kein Beweis dieser Geometrie. Für eine Scheibe tragen auch weiter außen

gelegene Ringe zur Kraft bei. In der Scheibenebene können sie einen Körper nach außen ziehen; innere und äußere Beiträge müssen gemeinsam berechnet werden.

Für eine achsensymmetrische Scheibe ergibt die Ableitung von Gleichung (2) die folgende Kraftsumme. R′, z′ und φ′ bezeichnen den Ort eines Massenelements, der Testpunkt liegt bei R und z = 0:

$$v_c^2(R) = GR\int \frac{\rho(R',z')(R-R'\cos\phi')\,R'\,dR'd\phi'dz'}{[R^2+R'^2-2RR'\cos\phi'+z'^2]^{3/2}} \tag{5}$$

Der Zähler enthält die Projektion der Anziehung auf die radiale Richtung. Sein Vorzeichen erklärt, weshalb einzelne äußere Beiträge nach außen wirken können. Die Dichte bleibt trotzdem überall positiv. Geschwindigkeitsquadrate verschiedener Komponenten addieren sich als Kraftbeiträge; diese Beiträge sind bei beliebigen Ringkomponenten nicht zwingend alle positiv. Deshalb ist eine Zerlegung in lauter positive „Teilgeschwindigkeiten“ nicht immer physikalisch definiert.

Erst weit außerhalb einer räumlich begrenzten Gesamtmasse nähert sich deren Feld unabhängig von der inneren Form einem Punktmassenfeld. Dort fällt v_c ungefähr wie $R^{-1/2}$. Eine innerhalb einer ausgedehnten Scheibe flache Kurve widerspricht Newton daher nicht. Sie verlangt aber eine passende ausgedehnte Masse. Eine flache Kurve über einen unbegrenzten Radiusbereich wäre bei endlicher Gesamtmasse nicht möglich.

2.3 Ein exakter Nachweis der geometrischen Mehrdeutigkeit

Eine besonders klare Gegenprobe kommt ohne Beobachtungsfehler aus. Man vergleiche eine unendlich dünne Kuzmin-Scheibe mit einer kugelsymmetrischen Plummer-Verteilung. Beide haben dieselbe endliche Gesamtmasse M und dieselbe Längenskala a. Ihre Potentiale lauten:

$$\Phi_K(R,z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+(a+|z|)^2}}, \qquad \Phi_P(R,z) = -\frac{GM}{\sqrt{R^2+z^2+a^2}} \tag{6}$$

In der Ebene z = 0 sind beide Potentiale gleich. Entsprechend ist auch ihre radiale Ableitung gleich. Die zugehörigen Dichten sind dagegen grundverschieden: eine auf die Ebene konzentrierte Flächendichte und eine räumliche Kugelverteilung.

$$\Sigma_K(R) = \frac{Ma}{2\pi(R^2+a^2)^{3/2}}, \qquad \rho_P(r) = \frac{3Ma^2}{4\pi(r^2+a^2)^{5/2}} \tag{7}$$

$$v_{c,K}^2(R) = v_{c,P}^2(R) = \frac{GMR^2}{(R^2+a^2)^{3/2}} \tag{8}$$

Die Flächendichte der Scheibe folgt aus dem Sprung der vertikalen Potentialableitung: Ober- und Unterseite liefern zusammen $4\pi G\Sigma$. Die Kugeldichte erhält man durch Einsetzen ihres Potentials in die Poisson-Gleichung. Die Integrale beider Dichten ergeben jeweils M. Damit ist die Mehrdeutigkeit konstruktiv gezeigt: Selbst eine beliebig genau bekannte Rotationskurve bestimmt die dreidimensionale Gestalt nicht eindeutig. Dieses Beispiel erzeugt keine überall flache Kurve; es isoliert ausschließlich das Geometrieproblem.

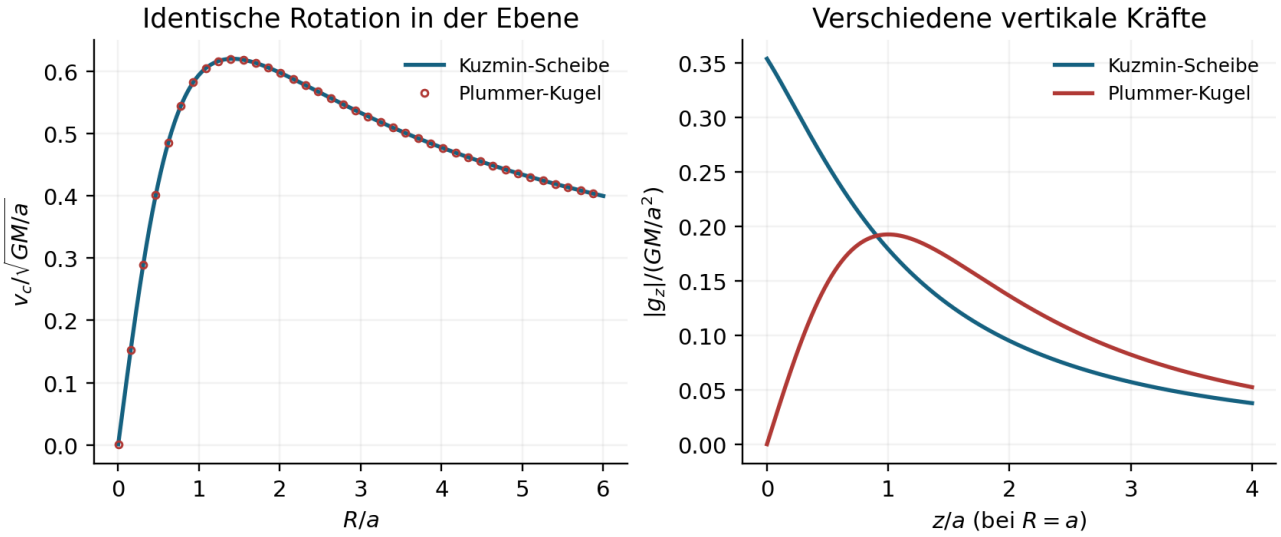


Abbildung 1. Analytische Gegenprobe ohne Messrauschen. Links fallen die Kreisgeschwindigkeiten einer Kuzmin-Scheibe und einer Plummer-Kugel exakt zusammen. Die offenen Kreise sind nur zur Unterscheidung ausgewählte Punkte derselben Funktion. Rechts unterscheiden sich die vertikalen Beschleunigungen am Radius R = a deutlich. Unmittelbar oberhalb einer ideal dünnen Scheibe bleibt eine endliche vertikale Kraft; bei der glatten Kugel verschwindet sie in der Symmetrieebene. Alle Achsen sind mit M und a dimensionslos normiert. Darstellung nach den Gleichungen (6)–(8).

3. Wie aus Spektren eine Rotationskurve wird

3.1 Dopplerverschiebung und Projektion

Die Orientierung einer Galaxienscheibe zum Beobachter muss aus den Daten erschlossen werden. Ein Spektrum misst zunächst die Geschwindigkeit entlang der Sichtlinie, etwa aus der Verschiebung der HI-Linie bei ungefähr 21 Zentimetern, von CO-Linien oder optischen Emissionslinien. Für die hier kleinen Geschwindigkeiten genügt die nichtrelativistische Dopplernäherung. Von der beobachteten Geschwindigkeit wird die systemische Geschwindigkeit der gesamten Galaxie abgezogen.

Ist i der Neigungswinkel der Scheibe, θ der Winkel in ihrer Ebene von der großen Achse aus und sind vφ, vR, vz die azimutale, radiale und vertikale Bewegung, ergibt die räumliche Projektion:

$$v_{\mathrm{los}} - v_{\mathrm{sys}} = \sin i \,[v_\phi \cos\theta + v_R \sin\theta] + v_z \cos i \tag{9}$$

Eine von oben gesehene Scheibe hat i = 0. Ihre Rotation erzeugt dann keine Sichtliniengeschwindigkeit. Bei einer idealen Kreisbewegung verschwinden vR und vz. An der projizierten großen Achse bleibt $v_{\mathrm{los}} - v_{\mathrm{sys}} = v_{\mathrm{c}} \sin i$. Das erklärt sowohl die Messmethode als auch ihre Neigungsabhängigkeit. Die Fehlerfortpflanzung bei festgehaltener Sichtliniengeschwindigkeit lautet für kleine Winkeländerungen:

$$\frac{\delta v_c}{v_c} \simeq -\cot i \,\delta i \quad (\delta i \text{ in Radiant}) \tag{10}$$

Bei 55 Grad Neigung bedeuten fünf Grad systematische Verschiebung ungefähr sechs Prozent Geschwindigkeitsänderung und etwa zwölf Prozent Änderung einer daraus bei fester Geometrie abgeleiteten dynamischen Massenskala. Dies ist eine Anschauungsrechnung, keine

neu bestimmte Unsicherheit der M33-Daten. Nahe der Draufsicht ist das Problem wesentlich größer.

Auch die Entfernung D geht ein. Ein beobachteter Winkel wird mit R ≈ Dθ zu einer Länge. Dynamische Massen aus gegebenen Geschwindigkeiten skalieren ungefähr mit D, aus Strahlungsflüssen abgeleitete Stern- und Gasmassen mit D^2. Ein Entfernungsfehler verschiebt deshalb nicht beide Massenbilanzen gleichermaßen. Für einen fairen Vergleich müssen alle Profile auf dieselbe Entfernung umgerechnet werden.

3.2 Verbogene Scheiben, räumliche Auflösung und nichtkreisförmige Bewegung

Viele äußere Gasscheiben sind verbogen. Die Standardmethode der geneigten Ringe beschreibt deshalb jeden Radiusbereich mit eigener Neigung und eigener Richtung der großen Achse. Diese Ringe sind zunächst eine kinematische Beschreibung, nicht der Nachweis separat existierender materieller Reifen. Gut bestimmt sind sie dann, wenn ein räumlich aufgelöster Datenwürfel — zwei Himmelskoordinaten und eine Geschwindigkeitsachse — die Geometrie ausreichend einschränkt.

Ein endlicher Teleskopstrahl mischt benachbarte Radien und Geschwindigkeiten. Dies kann besonders im inneren steilen Anstieg die Rotation verfälschen. Ein Interferometer misst außerdem nicht jede räumliche Skala gleich gut: Ohne hinreichend kurze Basislinien fehlen großflächige Strukturen. Mehr Belichtungszeit allein stellt diese Information nicht wieder her; ergänzende Einzelantennenmessungen sind dafür wichtig [16]. Aus einem Profil den Intensitätsmittelwert, den höchsten Peak oder eine angepasste Komponente zu verwenden, kann bei mehreren überlagerten Gasbewegungen zu unterschiedlichen Geschwindigkeiten führen.

Die Zugehörigkeit äußerer Messpunkte zur Galaxie wird durch zusammenhängende Gasstrukturen, kontinuierliche Geschwindigkeitsfelder, die Anschlussfähigkeit an die innere Rotation und die Konsistenz verschiedener Beobachtungen gestützt. Ein ähnlicher Dopplerwert allein beweist weder gleiche Entfernung noch eine Kreisbahn. Abgelöste Wolken, Akkretion und Vordergrundgas verlangen eine eigene Prüfung. Es wäre deshalb falsch, jeden außerhalb des optischen Bildes liegenden HI-Fleck ungeprüft als Rotationsmesspunkt zu behandeln.

3.3 Druck und ungeordnete Bewegung

Bei Gas kann ein nach außen abnehmender Druck einen Teil der Schwerkraft ausgleichen. Die gemessene Umlaufgeschwindigkeit ist dann kleiner als die Geschwindigkeit, die ein druckfreier Körper auf derselben Kreisbahn hätte. Die radiale Euler-Gleichung liefert im stationären, achsensymmetrischen Fall:

$$v_c^2 = v_\phi^2 - \frac{R}{\rho}\frac{\partial P}{\partial R} \simeq v_{\mathrm{rot}}^2 - \sigma_g^2 \frac{d\ln(\Sigma_g \sigma_g^2)}{d\ln R} \tag{11}$$

Die rechte Näherung setzt eine effektiv isotrope Gasdispersion σ_g und eine passende vertikale Mittelung voraus. Sinkt der Druck nach außen, ist der Korrekturterm positiv. Diese Korrektur beseitigt eine Massendifferenz also nicht automatisch; häufig erhöht sie die benötigte Kreisgeschwindigkeit. Bei Sternen übernehmen ungeordnete Bahnen einen entsprechenden Teil der dynamischen Stützung. Dort spricht man vom asymmetrischen Drift, der aus den Bewegungsgleichungen eines Ensembles folgt.

Eine sehr gute Kurvenanpassung ist nur so belastbar wie die Trennung dieser Effekte. Korrelierte Geometriefehler lassen sich nicht durch viele benachbarte Radialpunkte wegmitteln. Für M33 bleiben die in der Literatur veröffentlichten Reduktionsannahmen Teil der Datengrundlage; die hier vorgelegte Arbeit hat sie nicht durch eine eigene Datenwürfelanalyse ersetzt.

4. Unabhängige Zugänge innerhalb einzelner Galaxien

4.1 Sterne mit ungeordneten Bahnen: die Jeans-Gleichung

Eine elliptische oder sphäroidale Galaxie kann durch ungeordnete Sternbewegungen getragen werden, auch wenn ihre mittlere Rotation gering ist. Aus vielen Sternen oder einem verbreiterten Absorptionsspektrum wird dann eine Geschwindigkeitsdispersion bestimmt. Die Jeans-Gleichungen sind statistische Bewegungsgleichungen: Sie folgen aus der Erhaltung der Zahl von Sternen im Orts- und Geschwindigkeitsraum.

Für ein stationäres kugelförmiges System lautet die radiale Gleichung, mit n als räumlicher Zahlendichte der vermessenen Tracersterne:

$$\frac{d(n\sigma_r^2)}{dr} + \frac{2\beta n\sigma_r^2}{r} = -n\frac{GM(<r)}{r^2}, \qquad \beta = 1 - \frac{\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2}{2\sigma_r^2} \tag{12}$$

$$M(<r) = -\frac{r\sigma_r^2}{G}\left(\frac{d\ln n}{d\ln r} + \frac{d\ln \sigma_r^2}{d\ln r} + 2\beta\right) \tag{13}$$

β misst die Richtungsabhängigkeit der ungeordneten Bewegung. Bei gleichen Dispersionen in allen Richtungen ist β = 0; überwiegend radiale Bahnen ergeben positive Werte. Da meist nur die Sichtlinienkomponente bekannt ist, können unterschiedliche Massen und unterschiedliche Bahnanisotropien ähnliche Daten erzeugen. Diese Masse-Anisotropie-Mehrdeutigkeit ist keine kleine technische Nebensache.

Wolf et al. [17] zeigen, dass die Masse nahe dem dreidimensionalen Halblicht-Radius $r_{1/2}$ unter bestimmten Gleichgewichts- und Profilbedingungen deutlich weniger von dieser Mehrdeutigkeit abhängt. Näherungsweise gilt $M_{1/2} \approx 3\,\langle\sigma_{los}^2\rangle\, r_{1/2}/G$. Der Halblicht-Radius umschließt die Hälfte des Lichts. Bei lichtschwachen Zwerggalaxien können dadurch erhebliche dynamische Masse-Licht-Verhältnisse erschlossen werden. Mitgliedschaft, Doppelsternbewegungen, Gezeiten und die geringe Sternzahl müssen jedoch geprüft werden. Die Formel ist kein allgemeiner Ersatz für eine vollständige dynamische Analyse.

4.2 Kräfte senkrecht zur Scheibe

Eine radiale Rotationskurve und die Bewegung senkrecht zur Scheibe untersuchen verschiedene Ableitungen desselben Potentials. Genau darin liegt die Möglichkeit, die Mehrdeutigkeit aus Abbildung 1 zu verringern. Für eine stationäre achsensymmetrische Sternpopulation gilt:

$$\frac{\partial(n\sigma_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{R}\frac{\partial[Rn\langle v_R v_z\rangle]}{\partial R} = -n\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{14}$$

Der zweite Term beschreibt eine Kopplung radialer und vertikaler Bewegungen, häufig als Neigungsterm bezeichnet. Er darf nur unter begründeten Bedingungen vernachlässigt werden. Kennt man die Abnahme der Sternzahl mit z und die Geschwindigkeitsverteilung,

lässt sich die vertikale Anziehung erschließen. Die Poisson-Gleichung verknüpft sie in der Ebene mit der lokalen Raumdichte und dem radialen Verlauf der Rotation:

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right|_0 = 4\pi G\rho(R,0) - \frac{1}{R}\frac{dv_c^2}{dR} \tag{15}$$

Eine zusätzliche dünne Scheibe erzeugt nahe der Ebene einen anderen vertikalen Kraftverlauf als eine ausgedehnte Kugel. Die Dicke einer Gasschicht und ihre Geschwindigkeitsdispersion liefern eine verwandte Probe: Eine stärkere Anziehung komprimiert bei gleicher zufälliger Bewegung die Schicht. Magnetfelder, kosmische Strahlung, Turbulenz und Nichtgleichgewicht können dabei zusätzlichen Druck beitragen.

Gaia-basierte Analysen der Milchstraße begrenzen zusätzliche dünne Scheiben über solche Sternbewegungen [18]. Sternströme liefern eine andere räumliche Probe: Ihre Bahnen reagieren auf die Kräfte außerhalb der Ebene. Bovy et al. [19] erhalten aus Palomar 5 und GD-1 unter ihren Modellannahmen ein annähernd rundes inneres Halo; ihr Dichteachsenverhältnis beträgt innerhalb von 20 kpc etwa 1,05 ± 0,14. Diese Zahl setzt die dort verwendete baryonische Potentialzerlegung voraus. Das ist eine an Messdaten gebundene Formbestimmung und wesentlich mehr als eine reine Rotationskurve. Es ist aber weder ein universelles Kugelgesetz noch eine Messung der Haloform von M33.

4.3 Gravitationslinsen und heißes Gas

Bei einer Galaxie als starker Gravitationslinse wird die Masse aus der Lichtablenkung eines Hintergrundobjekts bestimmt. Hier verwendet man die Allgemeine Relativitätstheorie im schwachen Feld, nicht allein die Newtonsche Bewegungsgleichung. Für eine rotationssymmetrische dünne Linse gilt für den Einsteinring mit physischem Radius R_{E}:

$$M_{2D}(<R_E) = \pi R_E^2 \Sigma_{\mathrm{crit}}, \qquad \Sigma_{\mathrm{crit}} = \frac{c^2}{4\pi G}\frac{D_s}{D_l D_{ls}} \tag{16}$$

D_{l}, D_{s} und D_{ls} sind die Winkeldurchmesserentfernungen zur Linse, zur Quelle und zwischen Linse und Quelle; c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die kritische Flächendichte ergibt sich aus der Lichtablenkung $4GM_2D/(c^2b)$ bei Stoßparameter b und der Geometrie des Lichtweges. Gemessen wird eine projizierte Gesamtmasse. Die Aufteilung zwischen Sternen und weiterer Materie braucht zusätzliche Information; die angenommene Häufigkeit massearmer Sterne kann sie verschieben. Die SLACS-Galaxien illustrieren die Kombination von Linsen- und Sternkinematik [20].

Materie entlang der Sichtlinie und die sogenannte Massenschicht-Mehrdeutigkeit begrenzen die Eindeutigkeit einer einzelnen Linsenrekonstruktion. Linsenbefunde verlangen zudem bei einer alternativen Gravitation eine konsistente Theorie der Lichtausbreitung. Eine geänderte Formel für Sternumlaufbahnen allein sagt noch nicht voraus, wie stark Licht abgelenkt wird.

Eine weitere Methode betrifft einzelne Galaxien mit heißem Röntgengas. Falls das Gas kugelförmig, hydrostatisch und durch thermischen Druck getragen ist, verbindet dessen Temperatur- und Dichtegradient die Masse mit der Druckstützung:

$$M(<r) = -\frac{k_B T(r) r}{G\mu m_p}\left(\frac{d\ln \rho_g}{d\ln r} + \frac{d\ln T}{d\ln r}\right) \tag{17}$$

k_{B} ist die Boltzmannkonstante und μm_{p} die mittlere Teilchenmasse. Die Gleichung entsteht durch Einsetzen des idealen Gasgesetzes in $dP/dr = -\rho_{\mathrm{g}}\, GM/r^2$. Zusätzlicher nichtthermischer

Druck oder Ausströmungen verfälschen die einfache Umkehrung. Die Methode wird hier als Zugang für einzelne Galaxien erläutert; keine Beobachtung oder Dynamik von Galaxienhaufen wird verwendet.

Diese Methoden sind nicht bei jeder Galaxie gleich gut verfügbar. M33 ist für Gasrotation hervorragend geeignet, für eine dichte dreidimensionale Kartierung stellarer Eigenbewegungen oder starke Linsen hingegen nicht. Erkenntnisse an der Milchstraße oder an Linsengalaxien können die allgemeine Hypothese prüfen, ersetzen aber keine entsprechenden Messungen an M33.

5. Baryonische Masse: Messsignal und Umrechnungsmodell

5.1 Sternlicht ist keine unmittelbare Massenmessung

Photometrie misst zunächst Fluss und Farbe. Mit Entfernung und Absorptionskorrektur entsteht eine Leuchtkraft L. Die Sternmasse wird meist über ein Masse-Leuchtkraft-Verhältnis Y erschlossen: $M_\star = YL$. Y hängt von Alter, chemischer Zusammensetzung, Sternentstehungsgeschichte, Sternresten und der anfänglichen Verteilung der Sternmassen ab. Wenige junge massive Sterne können viel Licht erzeugen, während zahlreiche massearme Sterne einen relativ großen Massenanteil bei geringer Leuchtkraft besitzen.

Sternpopulationssynthese berechnet das gemeinsame Spektrum einer angenommenen Population. Sie ist ein astrophysikalisches Umrechnungsmodell, keine direkte Wägung und keine Simulation des gravitativen Massenbedarfs einer Galaxie. In dieser Arbeit sind solche photometrischen Massen als ausdrücklich modellabhängiger Zusatzvergleich zugelassen. Nicht zulässig wäre dagegen, eine Sternmasse zuerst an dieselbe Rotationskurve anzupassen und sie anschließend als unabhängige Bestätigung dieser Dynamik auszugeben.

Nahes Infrarot vermindert den Einfluss der Extinktion und vieler kurzlebiger heller Sterne, beseitigt die Unsicherheit in Y aber nicht. Aufgelöste Sternzählungen helfen bei nahen Galaxien; sie bleiben durch Vollständigkeit, Überlagerung und die geringe Helligkeit der masseärmsten Sterne begrenzt. Systematische Fehler müssen deshalb als korrelierte Änderungen eines Profils behandelt werden, nicht ausschließlich als kleine unabhängige Fehler jedes Bildpunkts.

5.2 Atomares und molekulares Gas

Neutraler atomarer Wasserstoff, HI, kann bei optischer Unsichtbarkeit über seinen Hyperfeinstrukturübergang bei etwa 21 Zentimetern strahlen. „Nicht ionisiert“ bedeutet daher keineswegs „nicht nachweisbar“. Im optisch dünnen Grenzfall und bei hinreichend hoher Spin-Temperatur ergibt die integrierte Linienhelligkeit die Wasserstoffsäule:

$$N_{\mathrm{HI,\,thin}} = 1.823 \times 10^{18} \int T_B(v)\, dv \quad [\mathrm{cm^{-2}}] \tag{18}$$

T_B ist die Helligkeitstemperatur in Kelvin, die Geschwindigkeit wird in km/s integriert. Der Zahlenfaktor folgt aus den atomaren Übergangseigenschaften. Aus einer Säule wird nach geometrischer Entprojektion eine Flächendichte. Für die gesamte Gasmasse muss Helium hinzugerechnet werden; der verwendete Faktor ist anzugeben. In den Rechenstudien wurden geringfügig verschiedene Konventionen verwendet, weshalb nicht jede Tabelle ohne Korrektur addiert werden darf.

Kaltes H_2 ist schwieriger. Dem homonuklearen Molekül fehlt ein permanentes elektrisches Dipolmoment; seine niedrigen Rotationsübergänge sind bei sehr niedriger Temperatur wenig wirksame Strahler. Häufig dient deshalb CO als Ersatztracer. Die übliche Umrechnung lautet:

$$N_{\mathrm{H_2}} = X_{\mathrm{CO}}\, W_{\mathrm{CO}}, \qquad W_{\mathrm{CO}} = \int T_{B,\mathrm{CO}}(v)\, dv \tag{19}$$

X_{CO} ist keine universelle Naturkonstante. Metallgehalt, Abschirmung, Anregung, Wolkenstruktur und das verwendete CO-Übergangspaar beeinflussen die Umrechnung. H_2 kann sich durch Selbstabschirmung erhalten, wo CO bereits photodissoziiert ist. Daraus entsteht CO-schwaches oder CO-dunkles molekulares Gas. Die Existenz dieser Phase ist physikalisch plausibel und beobachtungsbasiert untersucht; ihre gesamte Masse muss dennoch gemessen oder begrenzt werden.

Die M33-CO-Kartierung von Druard et al. [8] liefert ein räumlich aufgelöstes Linienprofil, aber keine voraussetzungsfreie vollständige H_2-Bilanz. Die in V6/V7 verwendete Umrechnung setzt $X_{\mathrm{CO}} = 4 \times 10^{20}$ cm^{-2}/(K km s^{-1}) und ein CO(2–1)/CO(1–0)-Intensitätsverhältnis von 0,8 voraus. Bereits darin steckt eine gegenüber einer häufigen Milchstraßenreferenz erhöhte Molekülmasse. Zusätzliche CO-dunkle Masse darf deshalb nicht ohne Prüfung nochmals vollständig addiert werden.

5.3 Staub, ionisiertes Gas und schlecht strahlende Körper

Optisch dünne thermische Staubstrahlung liefert näherungsweise den Fluss $F_\nu = \kappa_\nu\, M_{\mathrm{d}}\, B_\nu(T_{\mathrm{d}})/\mathrm{D}^2$. κ_ν ist die Absorption pro Staubmasse, B_ν die Planckfunktion und T_{d} die Staubtemperatur. Damit folgt:

$$M_d = \frac{F_\nu D^2}{\kappa_\nu B_\nu(T_d)}, \qquad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\,\frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \tag{20}$$

Kaltes Material strahlt bei gleicher Masse schwächer. Eine Mischung verschiedener Temperaturen ist deshalb nicht ohne Weiteres durch eine einzige Farbtemperatur repräsentiert. Zusätzlich wird aus Staub erst über ein Gas-Staub-Verhältnis eine Gasmasse. Die Unsicherheit dieses Verhältnisses und von κ_ν kann mit der gesuchten verborgenen Gasphase gekoppelt sein: Wer die Staubabsorption unter der Voraussetzung kalibriert, dass CO-schwache Gebiete nur HI enthalten, kann vorhandenes H_2 teilweise in die Kalibrierung aufnehmen. M33-Analysen diskutieren diese Kopplungen ausdrücklich [11,12].

Ionisiertes Gas erzeugt Rekombinationslinien und bei hohen Temperaturen Röntgenstrahlung. Viele Emissionssignale hängen ungefähr vom Quadrat der Teilchendichte ab. Eine sehr dünne, große Gasmenge kann deshalb bei gleicher Gesamtmasse viel schwächer emittieren als dichte Klumpen. Absorptionsmessungen reagieren eher auf die integrierte Säule, benötigen aber geeignete Hintergrundquellen und eine Ionisationskorrektur. Wenige Sichtlinien kartieren kein vollständiges dreidimensionales Reservoir.

Für feste oder kompakte Körper spielt das Verhältnis von Oberfläche zu Masse eine Rolle. Bei einer Kugel mit Radius a und Materialdichte ρ_{s} beträgt der geometrische Querschnitt pro Masse $3/(4\rho_{\mathrm{s}}\ \mathrm{a})$. Große Körper bieten daher pro Kilogramm wenig Fläche zum Reflektieren, Absorbieren und thermischen Strahlen. Das erklärt eine reale elektromagnetische Nachweisschwäche. Ein galaktisch dominanter Bestand solcher Körper hätte jedoch zusätzliche Folgen für Mikrolinsen, dynamische Erwärmung, Kollisionen und seine Entstehungsbilanz. Ein geringer Reflexionsgrad ist keine ausreichende Charakterisierung eines konsistenten Massenmodells.

Komponente	Primäres Signal	Bedingung der Massenableitung
Sterne	Licht, Farben, Spektren, Sternzählungen	Y, Sternmassenverteilung, Extinktion, Vollständigkeit
HI	21-cm-Emission und -Absorption	Optische Tiefe, Spin-Temperatur, Flächenfüllung
H_2	CO, Staub, UV-Absorption, [CII]	Chemie, Anregung, Konversionsfaktoren, Phasenmischung
Ionisiertes Gas	Rekombination, UV-/Röntgenlinien	Ionisationsgrad, Temperatur, Klumpung, Geometrie
Staub / kompakte Körper	IR/submm, Extinktion, Mikrolinsen	Temperatur und Opazität bzw. Größe, Masse und Suchauswahl

Tabelle 1. Beobachtungssignale und zentrale Umrechnungsannahmen für gewöhnliche Materie. Mehrere voneinander unabhängige Tracer vermindern die Mehrdeutigkeit; sie beseitigen sie nicht grundsätzlich.

6. M33 als Prüfobjekt: Daten, Reichweite und Zuordnung

M33 ist eine nahe Spiralgalaxie mit einer ausgeprägten Scheibe und ohne dominierenden klassischen Bulge. In den hier analysierten Rechnungen wird eine Entfernung von 840 kpc verwendet. Die optische Aufnahme auf dem Titel zeigt die Sternscheibe, Staubbänder und Sternentstehungsgebiete. Ihre sichtbare Ausdehnung ist keine physikalische Massengrenze: Sie hängt auch von Belichtung, Hintergrundabzug und Bildbearbeitung ab. Insbesondere reicht die neutrale Gasscheibe weiter hinaus als die auf einem ästhetisch bearbeiteten Bild auffällige Sternscheibe.

Die numerische Grundlage umfasst 58 veröffentlichte Rotationswerte zwischen 0,24 und 22,72 kpc aus Corbelli et al. [6]. Die zugrunde liegenden HI-Beobachtungen kombinieren Interferometer- und Einzelantennendaten. Die äußere Geometrie wird mit geneigten Ringen beschrieben; die Autoren behandeln Unterschiede zwischen Geschwindigkeitsmaßen und Geometriebestimmungen. Die Kurve ist folglich eine datenbasierte kinematische Rekonstruktion, keine unmittelbar abgelesene Liste voraussetzungsfreier Kreisgeschwindigkeiten.

Eine unabhängige M33-Analyse mit weiteren HI-Daten und Hα-Kinematik stammt von Kam et al. [7]. Sie zeigt neben der geordneten Rotation auch schwache anomale Geschwindigkeitskomponenten. Solche Befunde sind relevant, weil eine wahllose Einbeziehung sämtlichen äußeren Gases die Rotationsinterpretation verschlechtern würde. Für die hier vorgestellten Zahlen wurde kein Mittelwert verschiedener Literaturkurven gebildet; die Datenbasis bleibt eindeutig die in den archivierten Rechnungen verwendete Tabelle.

Die Zugehörigkeit der regulären äußeren HI-Scheibe wird durch ihre räumlich-kinematische Kontinuität gestützt. Das ist eine methodisch erheblich stärkere Zuordnung als die bloße Vermutung, alles im Bild gehöre zur Galaxie. Sie beweist jedoch nicht für jede einzelne Wolke eine bekannte Entfernung. Die tiefe AGES-Kartierung findet zusätzliche HI-Strukturen in der

Umgebung, deren Herkunft gesondert zu beurteilen ist [15]. Solche abgesetzten Strukturen werden nicht automatisch zu weiteren Kreisbahnpunkten.

Der baryonische Vergleich verwendet HI- und CO-Profile, ein 3,6-µm-Lichtprofil sowie separat photometrisch erschlossene Sternmassen [3,8,9]. Die Sternmassenspalte einer bereits dynamisch normalisierten Literaturzerlegung wird ausdrücklich nicht als unabhängige Sternmassenmessung eingesetzt. Oberhalb von 5 kpc besitzt die in V7 verwendete Sternverteilung ergänzende Fortsetzungsannahmen. Diese regionale Grenze ist für die Beweiskraft wichtiger als eine große Zahl von Dezimalstellen.

Datenstatus: Die Punkte der folgenden Rotationsabbildung stammen aus einer publizierten kinematischen Analyse. Die Kurven und Dichten sind Ergebnisse der Rechenstudien V5–V7. Die Fotografie dient ausschließlich der Anschauung und liefert in diesen Rechnungen keine Massendichte.

Das zentralsymmetrische Entfernungsnetz auf der Titelaufnahme verbindet die Fotografie mit den radialen Diagrammen: Eine mit 6 kpc beschriftete Ellipse bezeichnet beispielsweise den Radius R = 6 kpc in der angenommenen Galaxienebene. Die helle Netzzeichnung berücksichtigt die Schrägsicht mit einer Referenzneigung von 55° und einem Positionswinkel von 22,7° bei D = 840 kpc. Die Bögen außerhalb der inneren Scheibe setzen diese eine Ebene geometrisch fort; sie ersetzen nicht die radienabhängige Geometrie der verwölbten HI-Scheibe. Anhang C erläutert die Projektion und die Grenzen des Vergleichs.

7. Dynamische Dichterekonstruktion und Baryonenvergleich

7.1 Freie Scheibenrekonstruktion V5

V5 [2] verwendet eine endliche, rotationssymmetrische Massenverteilung aus einer abgeflachten Komponente und einer kleinen zentralen Verdickung. Der äußere Scheibenradius ist auf 30 kpc, die vertikale Halbachse auf 0,3 kpc und der Radius der zentralen Verdickung auf 0,5 kpc festgelegt. Überlappende Volumina werden nicht doppelt gezählt. Eine kleine zentrale Punktkomponente von 10^6 $M_\odot$ ist ein Modellterm; sie stellt keine Messung eines Schwarzen Lochs in M33 dar.

Die Dichte wird mit 28 nichtnegativen Stützwerten als Funktion eines radialen Parameters beschrieben. Alle Massenbeiträge werden nach Newton integriert, einschließlich der außerhalb eines Testpunktes gelegenen Materie. Die bevorzugte, gegen kleine radiale Bahnauslenkungen geprüfte Lösung hat eine Gesamtmasse von $5{,}30 \times 10^{10}$ $M_\odot$; innerhalb des letzten Rotationsradius liegen etwa $5{,}16 \times 10^{10}$ $M_\odot$. Die Geschwindigkeits-RMS-Abweichung beträgt 1,87 km/s, die verwendete χ^2-Summe 2,445.

Diese sehr kleine Abweichung belegt die Flexibilität der Dichteparametrisierung. Sie ist kein statistischer Sieg über ein Modell mit wenigen Haloparametern: Zahl, Freiheit und Regularisierung der Parameter sowie korrelierte Messfehler unterscheiden sich. Eine weitere V5-Lösung nahe $4{,}94 \times 10^{10}$ $M_\odot$ wurde über eine zugelassene χ^2-Erhöhung ausgewählt. Die dabei verwendete Schwelle $\Delta\chi^2 = 1$ wird hier nicht als allgemeines Konfidenzintervall gedeutet.

Ein früheres Scheibenmodell für die Milchstraße [1] illustriert ebenfalls die Möglichkeit, Radialdichten dynamisch anzupassen. Für die vorliegende Fragestellung ist jedoch ein dort verwendeter Nahbereichsausschluss methodisch problematisch: Masse innerhalb eines festen

Abstands vom Testpunkt wird nicht berücksichtigt. Der V5-Test eines Ausschlussradius von 750 pc verändert die berechnete Geschwindigkeit derselben Dichte um bis zu 23,75 km/s. Eine anschließende Anpassung mit diesem veränderten Kraftgesetz liefert eine wesentlich größere Masse und ist mit dem vollständigen Newtonschen Feld nicht gleichwertig. Deshalb werden derartige Ausschlüsse nicht als physikalische Vereinfachung übernommen.

Bei einer glatten dreidimensionalen Dichte ist der lokale Beitrag integrierbar. Das Volumenelement wächst wie Abstand², während der Kraftbetrag proportional zum Kehrwert des Abstandsquadrats fällt; zusätzlich heben sich gegenüberliegende Richtungen weitgehend auf. Numerische Singularitätsbehandlung muss diesen Grenzwert korrekt behandeln. Ein Loch mit festem physischem Radius entfernt dagegen reale Gravitation. Bei ideal dünnen Scheiben sind Grenzwert und Symmetrie besonders sorgfältig zu behandeln; auch dort ist ein beliebig gewähltes Loch keine neutrale Rechenhilfe.

7.2 Unabhängiger Dichtevergleich V6

V6 [3] vergleicht die V5-Flächendichte mit Gasprofilen und einem getrennt ausgewiesenen photometrischen Sternmassenmodell. Über den gemeinsamen Ringbereich 0,5–5 kpc enthält das dynamische V5-Modell 12,78 Milliarden Sonnenmassen. Das photometrische Sternprofil ergibt 3,14 Milliarden, das kartierte Gas einschließlich Helium 0,77 Milliarden; zusammen sind es 3,92 Milliarden Sonnenmassen. Die Rundungsdifferenz bei der Addition ist ohne physikalische Bedeutung. Der beobachtungsbasierte Zusatzvergleich deckt damit ungefähr 31 Prozent des V5-Massenbedarfs dieses Bereichs.

Die Abweichung ist nicht nur ein globaler Skalierungsfaktor. Das Verhältnis dynamischer zu photometrisch-gasbasierter Flächendichte steigt in den ausgewerteten Ringen von ungefähr 2,19 auf 4,11. Würde die gesamte Differenz ausschließlich Sternen zugeschrieben, müsste ihr Masse-Leuchtkraft-Verhältnis relativ zum angesetzten photometrischen Profil um Faktoren von etwa 2,32 bis 5,60 steigen. Abbildung 2 zeigt diese radiale Struktur. Ein globaler CO-Faktor oder eine einheitliche Sternkalibrierung kann eine solche Formabweichung nicht beliebig beseitigen.

Die Zahlen beziehen sich ausdrücklich auf das V5-Modell, nicht auf die später minimierte V7-Dichte. Eine Variation der photometrischen Sternmasse um ±30 Prozent dient in V6 als Sensitivitätstest; sie ist kein empirisch abgeleitetes Wahrscheinlichkeitsintervall. Außerhalb des gemeinsamen photometrischen Vergleichsbereichs darf der Prozentwert nicht unverändert fortgeschrieben werden.

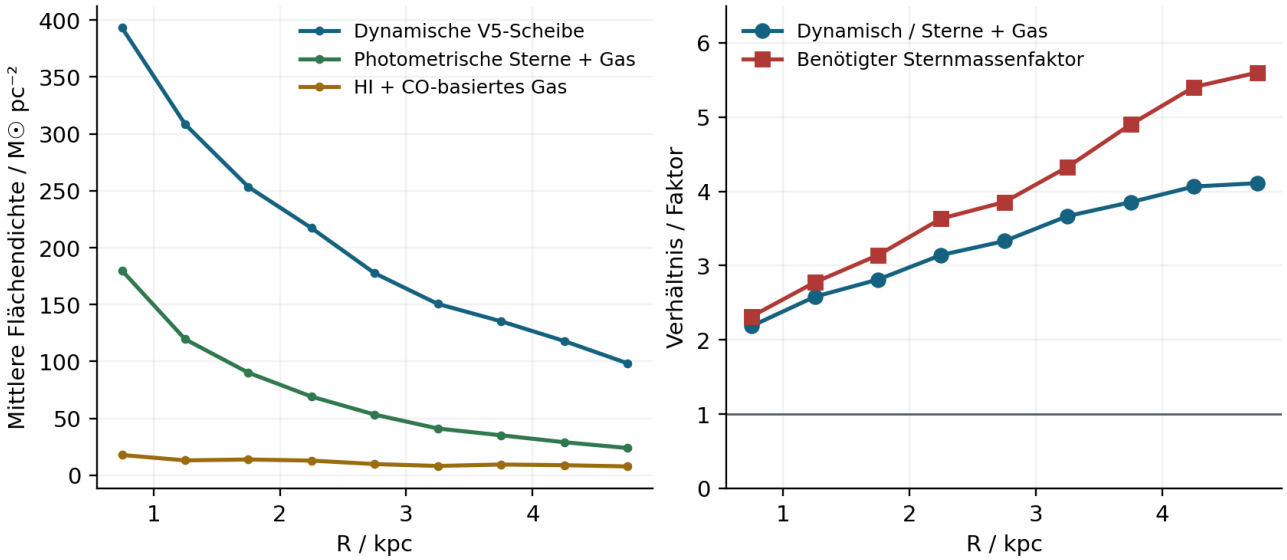


Abbildung 2. Unabhängiger baryonischer Zusatzvergleich aus V6. Links: mittlere Flächendichten in Ringen zwischen 0,5 und 5 kpc. Die blaue Kurve ist dynamisch aus V5 rekonstruiert; die grüne kombiniert photometrisch erschlossene Sternmasse und kartiertes Gas. Rechts: Verhältnis beider Profile sowie der erforderliche Faktor der Sternmasse, falls die gesamte verbleibende Differenz nur Sternen zugeschrieben würde. Die Darstellung vergleicht keine direkt beobachtete Gesamtmasse mit einer zweiten direkten Messung, sondern zwei unterschiedliche Schlussketten. Es sind keine Konfidenzbänder angegeben.

8. M33 mit möglichst geringer Zusatzmasse: das Problem V7

8.1 Definition der Modellklasse

Eine Kurve möglichst genau anzupassen und die benötigte Masse zu minimieren sind verschiedene Optimierungsziele. V7 [4] sucht unter vorgegebenen Bedingungen die kleinste gesamte oder die kleinste zusätzlich zuzuordnende Masse. Die Gesamtverteilung besteht aus Sternen, atomarem und molekularem Gas, einer frei wählbaren Zusatzscheibe und der kleinen zentralen Komponente. Ein sphärisches Halo ist nicht enthalten.

Die vertikale Dichte jeder Scheibenkomponente ist als gleichförmige Schicht innerhalb ihrer Halbdicke h angenommen: ρ = Σ/(2h) für |z| kleiner als h, außerhalb null. In kpc gelten $h_\star$ = 0,1 + 0,02R, h_{HI} = 0,3, h_{H_2} = 0,05 und h_{zusatz} = 0,15. Der Modellrand liegt bei 30 kpc. Die Zusatzflächendichte wird durch nichtnegative, radial stückweise lineare Basisfunktionen dargestellt; die feinste verwendete Knotenweite beträgt 125 pc.

Diese vertikale Verteilung ist eine Rechenannahme, noch kein selbstkonsistentes thermisches oder kollisionsloses Gleichgewicht. Auch die gemeinsame achsensymmetrische Ebene vereinfacht die reale äußere Verbiegung von M33. Die veröffentlichte Ringgeometrie dient der kinematischen Entprojektion; die Kraftberechnung bildet nicht jede dreidimensionale Verbiegung nach. Eine Minimalaussage muss daher an diese Modellklasse gebunden bleiben.

8.2 Warum sich die Minimierung linear formulieren lässt

Die Gravitation ist linear in der Dichte. Werden die Basisdichten als B_j und ihre nichtnegativen Gewichte als a_j geschrieben, kann ihr Beitrag zu $q_i = v_c^2(R_i)$ einmal vorab berechnet werden. Es entsteht eine Kraftmatrix K. Die Masse jeder Basisfunktion ist ebenfalls ein vorab bestimmbarer Koeffizient m_j:

$$q_i = \sum_j K_{ij} a_j + q_{i,0}, \qquad M = \sum_j m_j a_j + M_0, \qquad a_j \geq 0 \tag{21}$$

q_i,0 und M₀ bezeichnen festgehaltene Beiträge. Soll die Modellgeschwindigkeit an jedem Messradius höchstens b veröffentlichte Fehlerbreiten σ_i von v_i abweichen, kann diese Bedingung bei nichtnegativen Geschwindigkeiten äquivalent quadriert werden:

$$[\max(0, v_i - b\sigma_i)]^2 \leq q_i \leq (v_i + b\sigma_i)^2 \tag{22}$$

Die Grenzen sind bekannte Zahlen, q_i ist linear in den a_j. Auch die in Abschnitt 10 beschriebenen lokalen Frequenzbedingungen sind bei fester Geometrie linear in diesen Dichten. Das ergibt ein lineares Optimierungsproblem mit einer linearen Zielfunktion. Ein numerisches Optimalitätszertifikat gilt innerhalb dieser diskretisierten Klasse. Es beweist weder ein globales Minimum über alle denkbaren Galaxiengeometrien noch die Existenz eines physikalisch realisierbaren Materials.

Für eine reine Kurvenanpassung wäre dagegen beispielsweise $\chi^2 = \Sigma[(v_{mod} - v_{obs})/\sigma]^2$ zu minimieren. Bei korrelierten Daten lautet die angemessene Form $\chi^2 = r^T C^{-1} r$ mit Residuenvektor r und Kovarianzmatrix C. Eine vollständige Kovarianzmatrix der hier verwendeten Rotationstabelle wurde in V7 nicht eingesetzt. Die Bedingung „jeder Punkt innerhalb bσ“ ist deshalb ein geometrisches Toleranzband im Datenraum, kein globales Konfidenzgebiet. Eine Minimalsuche nutzt verständlicherweise häufig die unteren erlaubten Geschwindigkeiten; genau dies ist im Residuenpanel der nächsten Abbildung sichtbar.

8.3 Großzügige baryonische Freiheitsgrade

Die unveränderte Basiskalibrierung der V7-Profile umfasst insgesamt 7,43 Milliarden Sonnenmassen: ungefähr 5,11 Milliarden in Sternen, 1,98 Milliarden im atomaren und 0,34 Milliarden im molekularen Gas, zuzüglich der kleinen zentralen Komponente. Gas enthält in V7 einen Heliumfaktor von 1,37. Diese Gesamtzahl umfasst auch die angenommene Fortsetzung der äußeren Profile und ist daher kein rein gemessenes Inventar.

Eine erweiterte Kalibrierung erlaubt für Sterne Faktoren 0,7–1,3, für HI 1–1,5 und für H_2 0,5–2. Das großzügigste Szenario erweitert diese Bereiche auf 0,7–2, 1–2 und 0,5–3. Sternfaktoren können radial variieren, die Gasfaktoren skalieren die jeweiligen Vorlagen. Diese Intervalle wurden für eine belastende Gegenprobe gewählt. Sie sind keine gemeinsam gemessenen Fehlerbalken und keine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Das äußere Sternprofil wird jenseits des gesichert verglichenen Bereichs ergänzt und bis 23 kpc ausgeblendet; auch das Molekülprofil besitzt eine äußere Ausblendung. Teilweise werden im Außenbereich gasreiche Messpixel als ganzer Ring repräsentiert. Diese Annahme begünstigt eine große baryonische Masse. Sie ersetzt aber keine vollständige Kartierung einer unbekannten, anders verteilten Materiephase. Die Rechnung prüft somit einen großzügigen Satz bestimmter Profile und nicht die Menge aller möglichen baryonischen Scheiben.

9. Ergebnisse der Minimalmassenrechnung und ihre Reichweite

9.1 Anpassungsgüte und verbleibender Massenbedarf

Für das punktweise Band b = 1 ergibt V7 bei frei minimierter Gesamtmasse 43,42 Milliarden M☉. Wird stattdessen die Zusatzmasse minimiert und die großzügigste baryonische Kalibrierung zugelassen, entsteht eine sehr ähnliche Gesamtmasse von 43,47 Milliarden M☉. Davon werden 15,17 Milliarden M☉ den skalierten Stern- und Gasprofilen zugeordnet; 28,30 Milliarden M☉ verbleiben in der freien Zusatzscheibe. Ihr Anteil beträgt rund 65,1 Prozent.

„Nicht zugeordnet“ ist hier die sachlich präzise Bezeichnung. Die Rechnung kennt an dieser Stelle nur gravitative Masse. Sie unterscheidet nicht zwischen kaltem H_2, massearmen Sternen, kompakten Körpern oder einem nichtbaryonischen Bestandteil. Sie zeigt aber, dass die Rotation nicht bereits durch Weglassen eines sphärischen Halos mit den zugelassenen bekannten Profilen erklärt wäre.

V7-Szenario, b = 1	Zugeordnet	Zusatz	Gesamt
Feste baryonische Kalibrierung	7,43	36,01	43,44
Erweiterte Kalibrierung	10,29	33,15	43,44
Großzügige Kalibrierung	15,17	28,30	43,47
Freies Minimum der Gesamtmasse	nicht zerlegt	nicht zerlegt	43,42

Tabelle 2. Massen in 10^9 M☉, über das gesamte Modell bis 30 kpc. Die ersten drei Zeilen minimieren die Zusatzmasse, die letzte die Gesamtmasse. Keine Zeile stellt ein statistisches Konfidenzintervall dar.

Innerhalb R = 22,72 kpc enthält die großzügige Referenzlösung 43,24 Milliarden M☉ insgesamt und 28,08 Milliarden M☉ in der Zusatzkomponente. Außerhalb dieses Radius liegen im Modell nur etwa 0,23 Milliarden M☉. Die Gesamtmasse wird hier deshalb kaum durch große unsichtbare Außenbereiche getragen. Diese Aussage gilt für die optimierte Lösung und nicht für jede mögliche Fortsetzung des wahren Gravitationsfeldes.

Die Anpassung erreicht $\chi^2 = 48{,}93$ und eine Geschwindigkeits-RMS-Abweichung von 5,63 km/s. Die maximale standardisierte Punktabweichung liegt definitionsgemäß bei eins. Die baryonische Kraft-Oberhülle bleibt im geprüften Parameterbereich an 41 von 58 Radien sogar unter $\nu_{\mathrm{obs}} - 2\sigma$. Dies ist ein deutlicher Befund innerhalb dieser Profilklasse. Wegen korrelierter Unsicherheiten, bewusst gewählter Parametergrenzen und fehlender alternativer Materieprofile ist daraus keine allgemeine „41-Punkte-Signifikanz“ oder universelle Ausschlusswahrscheinlichkeit abzuleiten.

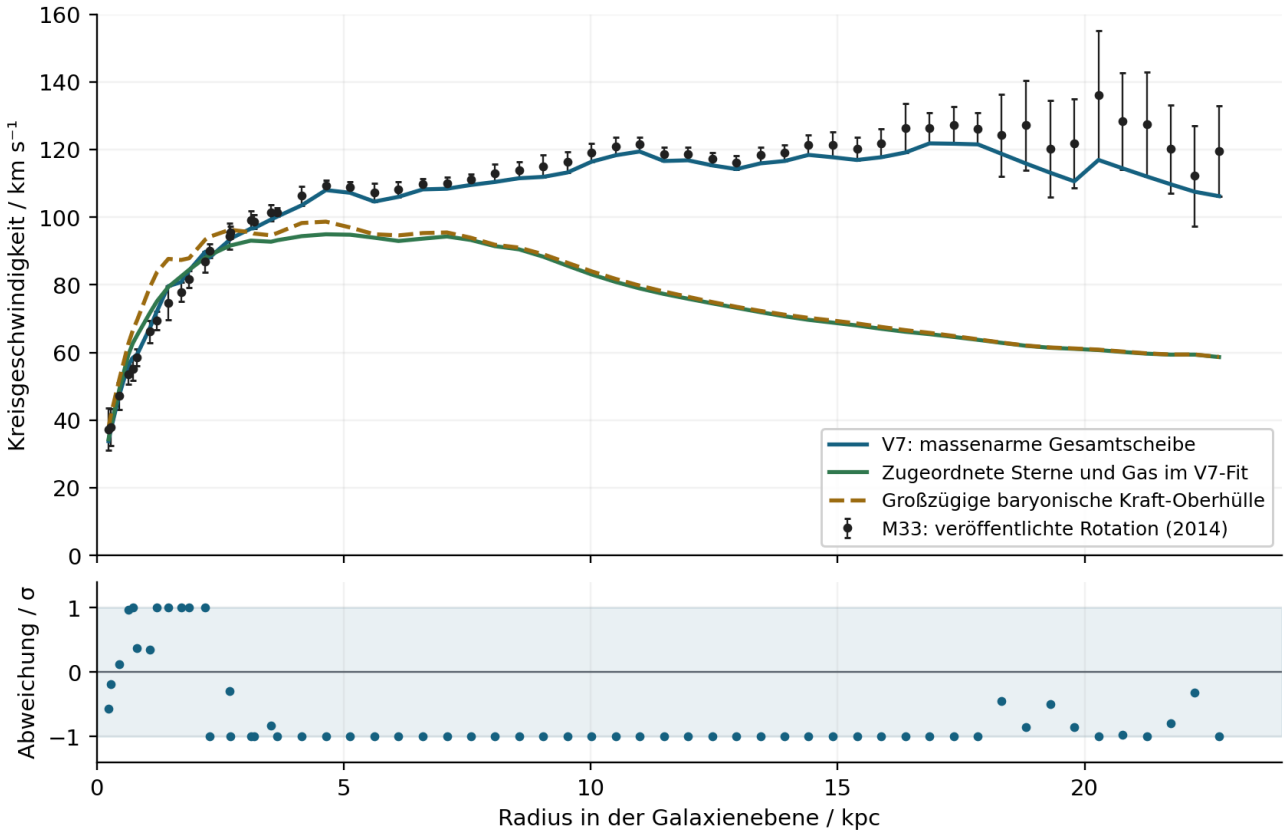


Abbildung 3. M33-Rotation und V7-Minimalmassenmodell. Schwarze Punkte: publizierte Geschwindigkeiten und die in der Rechenstudie verwendeten Fehlerbreiten. Blau: Gesamtscheibe ohne sphärisches Halo. Grün: Kraftbeitrag der im Fit zugeordneten Stern- und Gasprofile. Ocker gestrichelt: radiusweise maximal mögliche baryonische Kraft innerhalb der großzügigen Parametergrenzen; diese Hülle muss nicht von einem einzigen gemeinsamen Parametersatz erzeugt werden. Unten: signierte Residuen der blauen Kurve, geteilt durch σ. Die Häufung am unteren Rand ist eine Folge der Massenminimierung. Der helle Bereich markiert das Optimierungsband, kein Konfidenzband.

9.2 Die Dichte ist weniger eindeutig als die integrierte Masse

Die freie Zusatzdichte zeigt schmale radiale Strukturen. Solche Spitzen sind nicht als beobachtete Ringe zu interpretieren. Ein diskretisiertes inverses Problem kann die vorhandene Freiheit nutzen, um mit wenig Gesamtmasse örtlich wirksame Kräfte zu erzeugen. Eine diskrete Lösung enthält damit auch die Struktur der Zielfunktion und der Nebenbedingungen.

Eine zusätzliche Beschränkung auf monoton fallende Gesamtflächendichte erhöht in einem Kontrolllauf die minimale Zusatzmasse nur auf etwa 28,61 Milliarden M⊙. Die Hauptaussage hängt somit in diesem Test nicht entscheidend von den schmalen Spitzen ab. Die Form jeder einzelnen Spitze ist dagegen nicht robust aus der Rotation bestimmt. Abbildung 4 stellt deshalb zusätzlich die kumulierte Masse dar, die weniger empfindlich auf diese kleinen Strukturen reagiert.

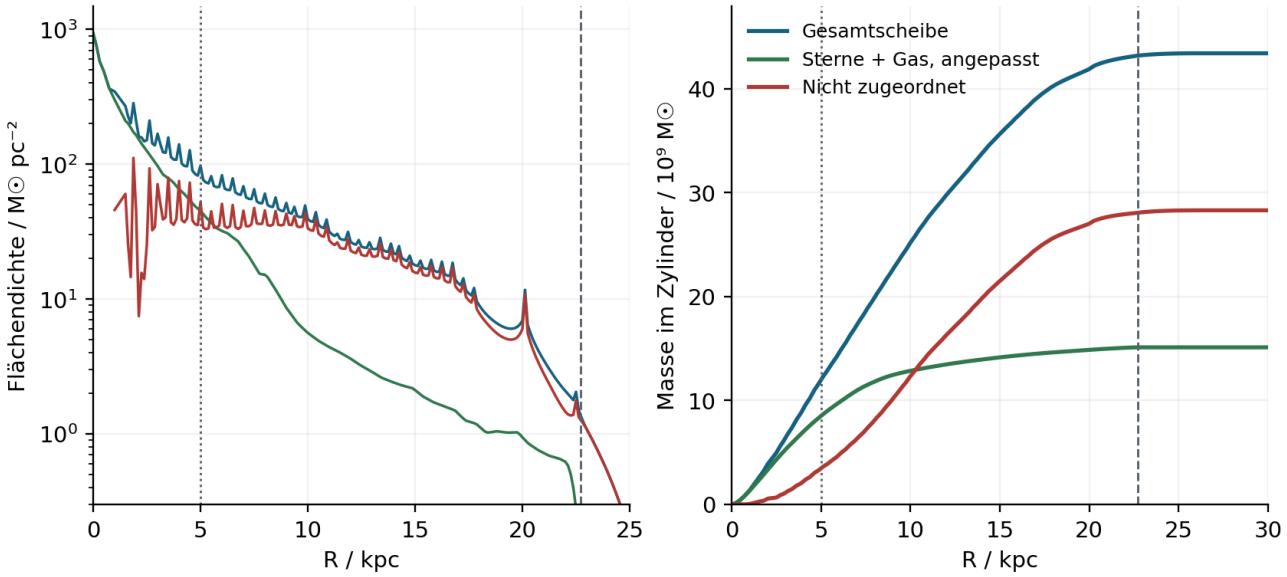


Abbildung 4. V7-Referenzlösung mit großzügiger baryonischer Kalibrierung. Links: radiale Flächendichten, logarithmische Ordinate; die kurzen Spitzen der freien Dichte sind Optimierungsstrukturen. Rechts: kumulierte Massen in Zylindern. Die punktierte Linie bei 5 kpc kennzeichnet das Ende des in V6 unmittelbar verglichenen photometrischen Bereichs, die gestrichelte Linie bei 22,72 kpc den letzten Rotationspunkt. „Sterne + Gas“ bezeichnet die angepasste Profilzuordnung, einschließlich der äußeren Fortsetzungsannahmen. Die Kurven sind Modelle, keine direkten Dichtekarten.

9.3 Sensitivität, numerische Kontrolle und Statistik

Die erlaubte Kurvenabweichung beeinflusst die minimale Masse systematisch. Bei b = 0,5 beträgt das freie Gesamtminimum 48,14 Milliarden M⊙, bei b = 1,5 etwa 39,75 Milliarden und bei b = 2 etwa 36,98 Milliarden. Die minimale Zusatzmasse im großzügigen Szenario sinkt entsprechend von 33,04 über 24,61 auf 22,01 Milliarden M⊙. Ein kleinerer Massenwert wird damit durch eine größere Abweichung von den Zentralwerten der Rotation erkauft; er ist nicht automatisch die bessere physikalische Beschreibung.

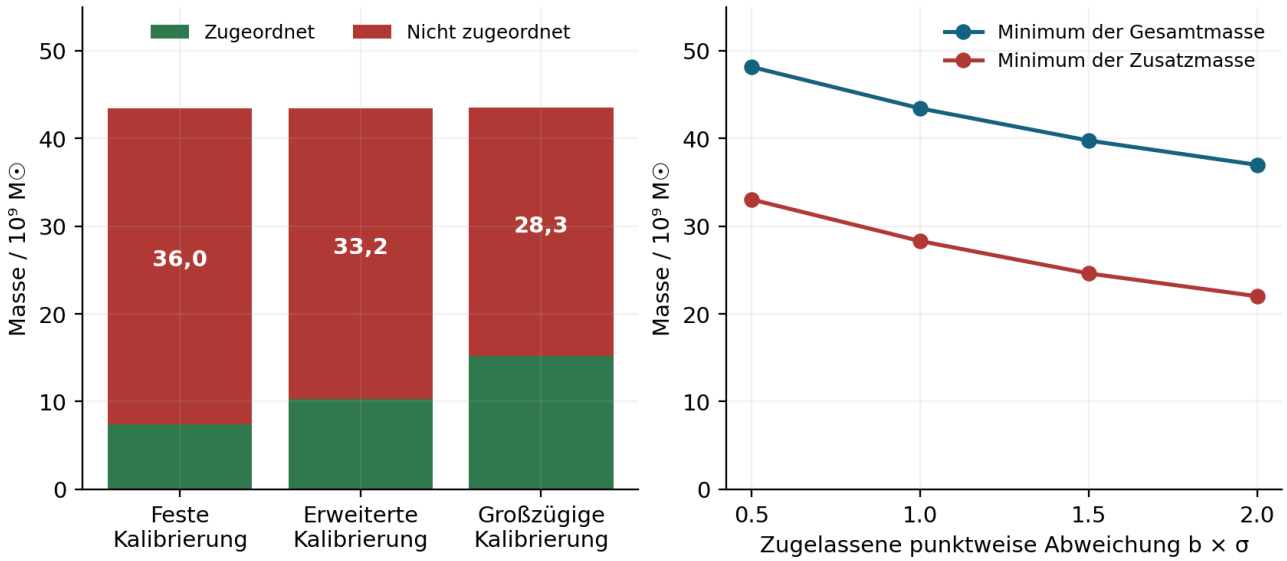


Abbildung 5. Zwei verschiedene Sensitivitäten der V7-Ergebnisse. Links wird bei festem Band b = 1 die Zuordnung zu Sternen und Gas großzügiger; die erforderliche Gesamtmasse ändert sich wenig, der unzugeordnete Anteil sinkt. Rechts wird das punktweise Geschwindigkeitsband erweitert. Die blaue Reihe minimiert jeweils die Gesamtmasse, die rote die Zusatzmasse bei großzügiger baryonischer Kalibrierung. Es handelt sich um verschiedene Optimierungen, keine Fehlerbalken derselben Schätzung. Alle Werte beziehen sich auf die feste V7-Geometrie.

Die Verfeinerung der radialen Knotenweite von 250 auf 125 pc ändert das freie Gesamtminimum von etwa 43,71 auf 43,42 Milliarden M⊙, also um rund 0,66 Prozent. Ein analytisch kontrollierbarer, vertikal verbreiterter Kuzmin-Test ergibt eine maximale Geschwindigkeitsabweichung unter 0,001 km/s. Solche Prüfungen belegen die Genauigkeit des Kraftoperators in den geprüften Fällen. Sie validieren weder die angenommene dreidimensionale Gestalt von M33 noch die stoffliche Deutung der Zusatzmasse.

Kontrollrechnungen mit anderen Dicken und Außenrändern zeigen ebenfalls eine Abhängigkeit von der Modellklasse. Ein zu naher scharfer Außenrand kann wegen seiner Kraftwirkung und der lokalen Stabilitätsbedingungen unzulässig werden. Diese Tests wurden teilweise mit gröberem Raster und anderen Sicherheitsmargen ausgeführt; ihre Massen dürfen daher nicht als präzise gemeinsame statistische Fehlerverteilung behandelt werden. Für eine belastbare Unsicherheit wären die Geometrie, ihre Korrelation mit den Rotationswerten und die Regularisierung gemeinsam zu variieren.

Auch der Vergleich mit Kugelmassen muss konsistent bleiben. Am letzten Datenpunkt liefern R = 22,72 kpc und v = 119,6 km/s nach Gleichung (4) eine kugeläquivalente Masse von 7,56 × 10^{10} M⊙. Verwendet man stattdessen die dort niedrigere V7-Modellgeschwindigkeit 106,2 km/s, ergibt dieselbe Kugelformel etwa 5,96 × 10^{10} M⊙. Die wirkliche V7-Zylindermasse beträgt 4,32 × 10^{10} M⊙. Sowohl die Geometrie als auch die bewusst andere Wahl innerhalb des Geschwindigkeitsbands beeinflussen den Vergleich. Keine dieser Zahlen darf mit einer weit außerhalb der Messradien extrapolierten Virialmasse gleichgesetzt werden.

10. Gleichgewicht und Stabilität: notwendige Zusatzbedingungen

10.1 Stabile Einzelbahnen sind noch keine stabile Galaxie

Für einen Testkörper mit erhaltenem Drehimpuls L_z lässt sich die radiale Bewegung im effektiven Potential $\Phi_{eff} = \Phi + L_z^2/(2R^2)$ beschreiben. Auf einer Kreisbahn verschwindet dessen erste Ableitung. Für eine kleine Verschiebung δR wird die Bewegungsgleichung linearisiert: $\ddot{\delta R} + \kappa^2 \delta R = 0$. Aus der zweiten Ableitung folgt die radiale Epizykelfrequenz:

$$\kappa^2(R) = \frac{1}{R}\frac{dv_c^2}{dR} + \frac{2v_c^2}{R^2}, \qquad \nu_z^2(R) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\Big|_0 \tag{23}$$

Bei positivem κ^2 schwingt eine kleine radiale Auslenkung um die Kreisbahn zurück; bei negativem Wert wächst sie. Entsprechendes gilt vertikal für ν_z^2. V7 verlangt auf seinem Prüfraster κ^2 mindestens gleich 0,15 Ω^2 sowie nichtnegatives ν_z^2. Ein nachträgliches verschobenes feines Raster ergab einen minimalen Wert κ^2/Ω^2 von etwa 0,14; die Sicherheitsmarge wird zwischen den Kontrollstellen also nicht exakt gehalten, die lokale Positivität bleibt im geprüften Bereich erhalten.

Sechs zusätzliche Testbahnen bei 1, 3, 6, 10, 15 und 20 kpc wurden in einem festgehaltenen Potential über fünf Umläufe verfolgt. Eine radiale Anfangsstörung von drei Prozent der Kreisgeschwindigkeit blieb dabei auf radiale Auslenkungen von höchstens etwa 6,2 Prozent begrenzt. Das ist eine Prüfung der Einzelbahndynamik. Die Testkörper verändern das Potential nicht. Eine selbstgravitierende Scheibe kann dagegen gemeinsam Ringe, Spiralen, einen Balken oder vertikale Wellen entwickeln, obwohl jede ungestörte Einzelkreisbahn lokal stabil ist.

10.2 Selbstgravitation, Druck und das Toomre-Kriterium

Für kleine, örtlich wellenförmige Störungen einer ideal dünnen Gasscheibe konkurrieren drei Wirkungen: die Rotation stabilisiert langwellige Störungen, der Gasdruck stabilisiert kurze Wellen, die Selbstgravitation verstärkt Verdichtungen. Im lokalen, achsensymmetrischen Grenzfall ergibt sich für die Störfrequenz ω und radiale Wellenzahl k:

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma_g |k| \tag{24}$$

c_s ist hier eine wirksame Schall- oder isotrope Druckgeschwindigkeit. Das Minimum der rechten Seite liegt bei |k| = $\pi G\Sigma_g/c_s^2$. Einsetzen liefert $\omega^2_{min} = \kappa^2 - (\pi G\Sigma_g/c_s)^2$. Alle betrachteten lokalen achsensymmetrischen Wellen bleiben damit stabil, wenn:

$$Q_g = \frac{\kappa c_s}{\pi G \Sigma_g} \geq 1, \qquad Q_\star = \frac{\kappa \sigma_R}{3.36 G \Sigma_\star} \gtrsim 1 \tag{25}$$

Die zweite Formel gilt für eine idealisierte kollisionslose Sternscheibe. Der Faktor 3,36 entsteht aus der Reaktion einer Verteilung stellarer Geschwindigkeiten, nicht aus einer anderen Gravitationskonstante [21]. Eine endliche Dicke, mehrere gekoppelte Komponenten und nichtachsensymmetrische globale Störungen verändern die Bedingungen. Q größer als eins ist daher keine Garantie gegen jeden Balken oder jede Biegestörung.

Eine rein diagnostische Anwendung der dünnen kollisionslosen Formel auf die freie Zusatzkomponente von V7 ergibt erforderliche radiale Dispersionen von ungefähr 63 km/s bei 10 kpc und 71 km/s bei 15 kpc. Diese Werte sind keine Messung verborgener Sterne und keine definitive Stabilitätsgrenze der realen Mehrkomponentenscheibe. Sie zeigen aber, dass eine massive Zusatzscheibe nicht ohne Weiteres als kalte Ansammlung fast identischer Kreisbahnen interpretiert werden darf. Eine große Dispersion verändert ihrerseits die mittlere Rotation und die Beziehung zwischen Dichte und Schichtdicke.

Für eine isolierte, isotherme, selbstgravitierende Schicht mit ρ(z) proportional zu sech²(z/z₀) folgt aus vertikalem Druckgleichgewicht und Poisson-Gleichung $z_0 = \sigma_z^2/(\pi G\Sigma)$. Stärkere zufällige vertikale Bewegung macht die Schicht dicker; größere Flächendichte komprimiert sie. Diese Relation illustriert eine Konsistenzbedingung. Die Kasten-Halbdicke h der V7-Rechnung ist nicht identisch mit z₀ und darf nicht ohne Modellwechsel in dieselbe Formel eingesetzt werden.

10.3 Koexistenz von Scheibe und Halo

Eine Scheibe und eine rundere Komponente sind nicht grundsätzlich dynamisch unvereinbar. Ein kollisionsloses Ensemble kann durch ungeordnete Bewegungen getragen werden, während ein anderes Ensemble überwiegend rotiert. Für eine stationäre Verteilung f von Orten und Geschwindigkeiten gilt die kollisionslose Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f - \nabla \Phi \cdot \nabla_v f = 0 \tag{26}$$

Verteilungsfunktionen, die von den erhaltenen Bahnintegralen abhängen, können im gemeinsamen Potential stationär sein. Dissipatives Gas kann Energie abstrahlen und eine flache Struktur bilden; eine kollisionslose Komponente muss dies nicht. Das erklärt die Möglichkeit unterschiedlicher Formen, ohne ihre tatsächliche Existenz bereits zu beweisen.

Eine wichtige Einschränkung bleibt: Ein exakt isotropes, nur von der Energie abhängiges Halo folgt den Äquipotentialflächen. In einem stark abgeflachten Gesamtpotential ist es deshalb

nicht gleichzeitig eine exakt unveränderte Kugel. Ein kugelförmiges Halo in einer Rotationskurvenzerlegung ist häufig eine nützliche Näherung, keine vollständige selbstkonsistente Verteilungsfunktion. Eine genaue Gleichgewichtsrechnung muss die Reaktion beider Komponenten berücksichtigen.

Auch ein massives Halo garantiert keine beliebige Scheibenstabilität. Spezielle M33-Modelle von Sellwood, Shen und Li [22] entwickeln ausgeprägte Balken, obwohl die reale Galaxie keinen entsprechend starken Balken zeigt. Änderungen von Sternmasse oder Dispersion verändern das Ergebnis, können aber andere morphologische Spannungen erzeugen. Dies ist eine offene Modellkonsistenzfrage und kein allgemeiner Beweis gegen jedes Halo. Die Simulation liefert hier einen Stabilitätstest; ihre Dichten werden nicht als beobachtete baryonische Dichten verwendet.

11. Wie viel gewöhnliche Materie könnte übersehen werden?

11.1 Optisch dickes HI und die Grenzen reiner Emissionsprofile

Im einfachsten Strahlungstransportmodell eines HI-Kanals gilt bei Flächenfüllfaktor f und Hintergrundtemperatur T_{bg}:

$$T_B = f(T_s - T_{\mathrm{bg}})(1 - e^{-\tau}), \qquad N_{\mathrm{HI}} = 1.823 \times 10^{18} \int T_s \tau \, dv \tag{27}$$

T_s ist die Spin-Temperatur und τ die optische Tiefe. Die Säulengleichung bezieht sich auf die bedeckte Sichtlinie; für einen aufgelösten Mittelwert muss f berücksichtigt werden. Bei kleinem τ wächst die Emission proportional zur Säule. Bei großem τ sättigt sie gegen f(T_s − T_{bg}): Mehr Materie erzeugt dann kaum mehr Helligkeit. Für einen einzelnen isothermen Kanal mit vernachlässigbarem Hintergrund beträgt die Korrektur gegenüber der dünnen Näherung τ/(1 − e⁻τ). Bei τ = 1 ist sie ungefähr 1,58, bei τ = 3 ungefähr 3,16.

Ein breites oder abgeflachtes Profil kann allerdings auch aus mehreren dünnen Geschwindigkeitskomponenten entstehen. Koch et al. [10] vergleichen diese Möglichkeiten für M31 und M33. In ihrem Material werden mehrkomponentige Profile meist gegenüber einem einzigen opaken Profil bevorzugt. Das schwächt eine spezielle Begründung für große flächendeckende Opazitätskorrekturen, beweist aber nicht die Abwesenheit jedes kalten optisch dicken Gases. Direkte Emissions-Absorptionsvergleiche gegen Hintergrundquellen sind entscheidend; deren geringe räumliche Stichprobe begrenzt die Extrapolation.

11.2 H₂ und Staub: reale blinde Bereiche, keine freie Massenbilanz

Gratier et al. [11] finden in einer Staub-Gas-Analyse von M33 einen zusätzlichen, CO nicht vollständig folgenden Gasanteil. Seine Interpretation hängt unter anderem vom Gas-Staub-Verhältnis und der Staubemissivität ab. Ein solcher Befund unterstützt die Existenz einer fehlenden Komponente in einem Tracerinventar. Er ist kein Nachweis einer beliebig großen, bis in die äußere Rotationsscheibe reichenden Masse.

UV-Absorption kann H_2 direkter nachweisen, benötigt aber helle, genügend wenig verdeckte Hintergrundsterne. Die FUSE-Untersuchung von Bluhm et al. [13] erfasst nur wenige Regionen von M33; eine Nichtdetektion entlang einer ausgewählten hellen Sichtlinie schließt Moleküle in benachbarten abgeschirmten Wolken nicht aus. [CII]-Linien liefern eine

ergänzende Information, stammen aber aus mehreren Materiephasen und dürfen nicht vollständig als H_2-Masse verbucht werden [14].

Ionisierte Materie ist in M33 auch direkt in UV-Absorption nachgewiesen. Zheng et al. [32] finden entlang sieben heller Sterne systematisch verschobene SiIV-Komponenten, interpretiert als Zufluss zur Scheibe. Die Absorption belegt diese Phase; eine Gesamtmasse erfordert zusätzliche Annahmen über Ionisation, Abdeckung und Geometrie. Sie wird hier nicht als direkte vollständige Massenmessung in die baryonische Bilanz übernommen.

Abbildung 6 verdeutlicht die Temperaturabhängigkeit einer Staubmasse bei konstantem Fluss und konstanter Opazität. Bei 250 µm ergibt eine Annahme von 10 statt 20 K etwa die 18,8-fache Masse, bei 500 µm die 5,2-fache. Dies sind physikalische Sensitivitäten einer Einbandumrechnung. Mehrbanddaten, die absorbierte Strahlungsenergie und die Verteilung von Abschirmung und Temperatur müssen gemeinsam erfüllt werden. Ein niedriger frei gewählter Temperaturparameter erzeugt noch keinen beobachteten Massenvorrat.

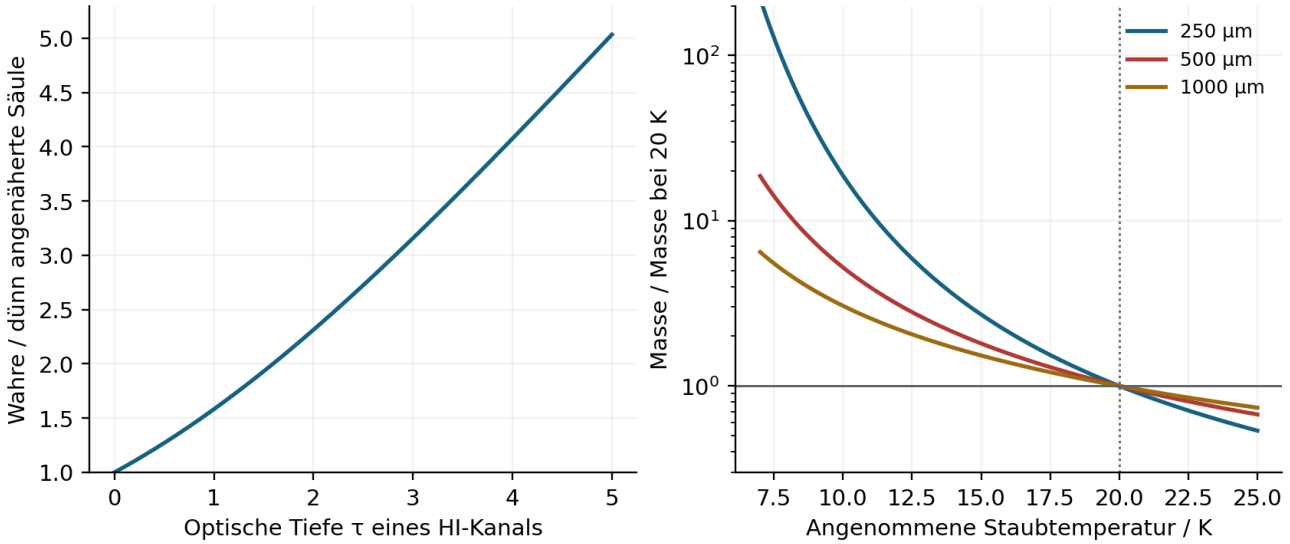


Abbildung 6. Zwei Nachweisprobleme in idealisierten, ausdrücklich bedingten Modellen. Links: HI-Säulenkorrektur $\tau/(1-\exp(-\tau))$ für einen isothermen Kanal mit gleichem Füllfaktor und vernachlässigbarem Hintergrund. Rechts: aus demselben Staubfluss abgeleitete Masse relativ zur Annahme 20 K, bei jeweils unveränderter Opazität. Die Kurven zeigen, weshalb Strahlung schwache oder gesättigte Massentracer bilden kann. Sie stellen weder Messungen an M33 noch zulässige globale Massenkorrekturen dar.

11.3 Eine Größenordnungsprobe für M33

Die V7-Zusatzmasse innerhalb 22,72 kpc beträgt $2{,}808 \times 10^{10}\ M_\odot$. Über die Kreisfläche gemittelt entspricht dies 17,31 $M_\odot/pc^2$. Würde diese gesamte Zusatzmasse als atomarer Wasserstoff mit Heliumfaktor 1,37 auftreten, ergäbe sich eine mittlere Wasserstoffsäule von ungefähr $1{,}58 \times 10^{21}\ cm^{-2}$ senkrecht zur Scheibe. Im optisch dünnen Grenzfall wäre eine integrierte 21-cm-Helligkeit von etwa 866 K km/s erforderlich [5].

Diese Rechnung ist keine Beobachtung, sondern eine falsifizierbare Übersetzung der benötigten Masse in ein mögliches Signal. Tiefe HI-Kartierungen erreichen für bestimmte Strahlgrößen und Linienbreiten sehr viel geringere Säulen [15]. Ein überall optisch dünnes, flächenfüllendes zusätzliches HI-Reservoir dieser Größenordnung wäre daher keine unauffällige Komponente. Der unmittelbare Vergleich mit einer einzelnen Nachweisgrenze ersetzt jedoch keine Rechnung zu Strahlfüllung, Linienbreite, Neigung, Opazität und

Interferometerfilterung. Ein kleiner Füllfaktor oder hohe Opazität verändern gerade die vorausgesetzte Signalumrechnung.

Wird die Masse stattdessen in kalten dichten Wolken konzentriert, müssen deren Druckstützung, Abschirmung, Kollisionen, Zerfall oder Sternbildung und ihre gemeinsame Scheibenstabilität erklärt werden. Wird sie in kompakten Körpern gespeichert, ändern sich die erwarteten Mikrolinsenzeitskalen und die dynamischen Wechselwirkungen. Mikrolinsensuchen etwa in Richtung M31 begrenzen bestimmte Massen- und Geometriebereiche [23]; sie sind kein undifferenziertes Verbot aller kompakten Materie in M33. Eine tragfähige Gegenhypothese muss angeben, welche konkrete Verteilung diese Grenzen einhält.

Für kompakte Objekte stellaren Massenbereichs ist die Milchstraße besonders aussagekräftig: EROS-2 begrenzt unter seinem Halomodell den Massenanteil von Objekten um 0,4 M☉ auf weniger als etwa acht Prozent bei 95 Prozent Konfidenz [33]. Die Magellanschen Wolken dienen dabei als Hintergrundlichtquellen; ihre Gruppendynamik wird nicht verwendet. Die Grenze hängt von räumlicher Verteilung, Geschwindigkeiten und Nachweiseffizienz ab und ist keine unmittelbar auf eine M33-Zusatzscheibe übertragbare Prozentzahl. Weil die charakteristische Ereignisdauer ungefähr mit der Quadratwurzel der Linsenmasse wächst, erfordern sehr kleine und sehr große Körper unterschiedliche Beobachtungsintervalle. Gemeinsam mit Sternzählungen begrenzt dies konkrete gewöhnliche Kandidaten stärker, als es eine optische Fotografie könnte.

Die derzeitige Aussage lautet daher nicht, dass gewöhnliche verborgene Materie prinzipiell ausgeschlossen sei. Vielmehr ist eine zusätzliche gewöhnliche Masse dieser Größenordnung durch die hier ausgewerteten Tracer nicht nachgewiesen, und ihre Existenz folgt nicht aus deren bekannten Nachweislücken. Eine Erklärung wird erst vollständig, wenn dieselbe räumliche Materieverteilung zugleich die Gravitation, die Strahlungsdaten und die Dynamik der Schicht erfüllt.

12. Einzelgalaxien als Test der Dunklen-Materie-Hypothese

12.1 Wiederkehrende Massendifferenzen und gemeinsame Skalengesetze

M33 ist kein isolierter methodischer Sonderfall. Räumlich aufgelöste Rotationskurven unterschiedlicher Galaxien zeigen, dass Licht und dynamischer Massenbedarf nicht durch ein universelles, unverändertes Masse-Leuchtkraft-Verhältnis verbunden werden können. In hellen inneren Scheiben kann die baryonische Gravitation dominieren, während lichtschwache Scheiben bereits innerhalb ihres sichtbaren Bereichs einen großen dynamischen Überschuss besitzen. Die SPARC-Datenbank kombiniert Photometrie bei 3,6 µm mit HI- und Hα-Rotation für 175 Galaxien und ermöglicht solche Vergleiche auf einer gemeinsamen Grundlage [24].

Diese Systematik stärkt die Realität des Problems gegenüber einer Erklärung durch einen einzigen zufälligen Messfehler in M33. Die Daten verschiedener Radien einer Galaxie sind dennoch nicht unabhängig, und gemeinsame Umrechnungsannahmen können auch Stichproben systematisch beeinflussen. Die bloße Zahl aller Radialpunkte ist daher kein direktes Maß der statistischen Sicherheit.

Ein besonders enger Zusammenhang verbindet die beobachtete Radialbeschleunigung $g_{obs} = v_{obs}^2/R$ mit der aus der baryonischen Verteilung berechneten Newtonschen Beschleunigung

g_{bar}. Die radiale Beschleunigungsrelation wurde an 153 SPARC-Galaxien mit einer empirischen Funktion beschrieben [25]:

$$g_{\mathrm{obs}} \simeq \frac{g_{\mathrm{bar}}}{1-\exp[-\sqrt{g_{\mathrm{bar}}/g_{\dagger}}]} \tag{28}$$

$g_{\dagger}$ liegt in dieser Beschreibung bei ungefähr $1{,}2 \times 10^{-10}$ m/s². Bei großen Beschleunigungen wird der Nenner nahezu eins; bekannte baryonische Materie liefert dann ungefähr die benötigte Anziehung. Bei kleinen Beschleunigungen ergibt die Entwicklung der Exponentialfunktion g_{obs} ungefähr gleich $\sqrt{(g_{\mathrm{bar}}\, g_{\dagger})}$. Die Gleichung beschreibt eine empirische Regelmäßigkeit, kein aus Newton abgeleitetes Naturgesetz.

Eine verwandte Beziehung ist die baryonische Tully-Fisher-Relation zwischen gesamter baryonischer Masse M_{bar} und äußerer charakteristischer Rotationsgeschwindigkeit V_{f}. Besonders gasreiche Galaxien vermindern den Einfluss unsicherer stellarer Masse-Leuchtkraft-Verhältnisse [26]. Näherungsweise gilt M_{bar} proportional zu V_{f}^{4}. Jede erfolgreiche Erklärung muss nicht nur einzelne Kurven, sondern auch solche engen Zusammenhänge reproduzieren.

Für Modelle mit Dunkler Materie bedeutet dies eine starke Verbindung zwischen baryonischer Struktur und zusätzlichem Gravitationsfeld. Sie kann nicht durch die bloße Einführung eines frei beliebigen Halos als verstanden gelten. Für modifizierte Dynamik sind diese Skalengesetze dagegen zentrale Erfolge. Die beobachtete Regelmäßigkeit entscheidet allerdings nicht allein, ob ihre Ursache eine Kopplung im Entstehungsprozess oder eine andere Grunddynamik ist.

12.2 Haloform, Dichteprofil und Teilchennatur sind verschiedene Fragen

Ein kugelförmiges Halo reduziert die Zahl der freien geometrischen Parameter. Ein bestimmtes radiales Haloprofil reduziert zusätzlich die Freiheit der Dichtefunktion. Beides kann eine gut prüfbare Modellannahme sein. Weder Kugelform noch ein bestimmter zentraler Dichteanstieg sind jedoch die Definition von Dunkler Materie.

In der THINGS-Analyse hochaufgelöster Rotationskurven bevorzugen manche massearmen Galaxien flachere zentrale Dichteprofile gegenüber einem steil ansteigenden Standardprofil [27]. Ein solcher Befund betrifft zunächst die Verteilung und gegebenenfalls die Entwicklung zusätzlicher Masse. Er beseitigt nicht automatisch den Unterschied zwischen baryonisch berechneter und beobachteter Gravitation. Umgekehrt bestätigt ein erfolgreicher Standardhalo-Fit nicht unabhängig dessen Entstehungsgeschichte oder Teilchenphysik.

Die stärkere Evidenz ergibt sich aus der Vereinbarkeit mehrerer Kraftproben: radiale Rotation, vertikale Bewegungen, räumliche Sternbahnen und gegebenenfalls Linsenmasse. Eine überwiegend ebene Zusatzmasse muss diese Beobachtungen ebenso erfüllen wie eine rundere Verteilung. Besonders gut vermessene Galaxien können dadurch ganze Geometrieklassen begrenzen. Eine universelle Kugelform aller Halos folgt daraus nicht.

Die nichtbaryonische Natur bleibt eine weitere Schlussstufe. Wenn die Gravitation mehr Masse verlangt, als die untersuchten baryonischen Phasen liefern, spricht dies für eine fehlende Komponente unter den jeweiligen Mess- und Dynamikannahmen. Um gerade deren Nichtbaryonizität aus Einzelgalaxien zu begründen, müssen ausreichend vollständige Grenzen für gewöhnliche Materie und alternative Dynamik hinzukommen. Ein einzelner Rotationsfit identifiziert weder Masse, Streuquerschnitt noch andere Eigenschaften eines neuen Teilchens.

12.3 Modifizierte Dynamik als ernsthafte Vergleichshypothese

MOND bezeichnet eine Familie von Ansätzen, in denen bei kleinen Beschleunigungen eine charakteristische Skala a_0 wichtig wird. In einer besonders einfachen sphärischen Beziehung wird g durch $\mu(g/a_0)g = g_N$ mit der Newtonschen baryonischen Beschleunigung g_N verknüpft. Im Bereich sehr kleiner Beschleunigungen wird μ(x) ungefähr x. Für eine räumlich begrenzte Masse folgt dann:

$$g \simeq \sqrt{a_0 g_N}, \quad g_N = \frac{GM_{\mathrm{bar}}}{r^2}, \quad \frac{v^2}{r} = g \quad \Longrightarrow \quad v^4 = GM_{\mathrm{bar}} a_0 \tag{29}$$

Die konstante äußere Geschwindigkeit und die vierte Potenz in der baryonischen Tully-Fisher-Relation ergeben sich damit gemeinsam. Dies ist ein substanzieller phänomenologischer Erfolg. Die Beschleunigungsskala muss aber über verschiedene Galaxien hinweg konsistent bleiben; eine frei pro Galaxie gewählte Skala würde die Vorhersagekraft vermindern.

Für eine allgemeine Scheibengeometrie ist die einfache algebraische Beziehung nicht automatisch die exakte Feldgleichung. Eine nichtrelativistische, energieerhaltende Feldformulierung von Bekenstein und Milgrom [28] lautet:

$$\nabla \cdot \left[\mu\!\left(\frac{|\nabla \Phi|}{a_0} \right) \nabla \Phi \right] = 4\pi G \rho_{\mathrm{bar}} \tag{30}$$

Der Faktor μ steht innerhalb einer räumlichen Ableitung. Das Feld hängt deshalb von der gesamten Geometrie und seinen Randbedingungen ab. Ein äußeres Feld kann die innere Dynamik beeinflussen. Eine faire M33-Prüfung sollte eine klar definierte Theorie mit dokumentierten Randbedingungen verwenden, statt eine beliebige Kurvenkorrektur als MOND zu bezeichnen. Für Linsentests kommt eine konsistente relativistische Erweiterung hinzu.

Literaturvergleiche für M33 liefern keine von den baryonischen Annahmen unabhängige Entscheidung: Die Wahl stellarer Masse-Leuchtkraft-Verhältnisse und der verwendeten Kinematik verändert die relative Güte von Halo- und MOND-Anpassungen [7]. Eine aktuelle Analyse von 147 SPARC-Galaxien berichtet für ihre getesteten Modelle eine geringe Präferenz für ein Dunkle-Materie-Modell mit baryonischer Rückwirkung, betont zugleich die Mehrdeutigkeit durch Entfernung und Neigung [29]. Die dort zusätzlich betrachteten gemittelten Linsensignale bis weit außerhalb einzelner Sternscheiben werden hier nicht als sauber isolierte Einzelgalaxienprobe verwendet.

Eine andere aktuelle Prüfung untersucht die abfallende äußere Rotationskurve der Milchstraße. Coquery und Blanchard [30] finden Schwierigkeiten der getesteten MOND-Varianten mit ihrem Standardmodell der baryonischen Materie. Die Aussage bleibt an diese kinematische Rekonstruktion gebunden. Koop et al. [31] zeigen anhand von Gaia-Daten Nichtachsensymmetrie und Nichtgleichgewicht; ihre ergänzenden numerischen Tests demonstrieren, dass Tracerprofile und Störungen die Jeans-Inversion beeinflussen können. Diese Simulationen werden hier ausschließlich als Methodentest interpretiert, nicht als gemessene Dichten oder als direkt auf M33 übertragbare Korrekturen.

Weder eine gelungene Einzelanpassung noch eine unter bestimmten Annahmen misslungene Kurve entscheidet die gesamte Theorieklasse. Erforderlich sind einheitliche Parameterregeln, unabhängige baryonische Bestimmungen, vergleichbare Fehlerbehandlung und zusätzliche

Vorhersagen. Die starke empirische Ordnung der Galaxiendaten bleibt eine Aufgabe für beide Erklärungsrichtungen.

13. Evidenzbilanz unter dem Ausschluss von Galaxienhaufen

Die Beschränkung auf Einzelgalaxien verändert die Reichweite der Schlussfolgerung. Es werden weder Haufendynamik noch Haufenlinsen, kosmische Hintergrundstrahlung, primordiale Elementhäufigkeiten oder großräumige Strukturbildung als Beweisstützen verwendet. Damit entfällt eine Reihe normalerweise kombinierter Argumente. Die folgende Bilanz bewertet ausschließlich die hier behandelten galaktischen Beobachtungen und die dokumentierte Newtonsche Gegenprobe.

Aussage	Beurteilung aus Einzelgalaxien
Die Rotation verlangt unter Newton häufig mehr Gravitation als die erfassten Baryonen liefern.	Gut gestützt durch wiederkehrende räumliche Massendifferenzen; abhängig von Geometrie, Gleichgewicht und baryonischen Umrechnungen.
Die M33-Rotation erzwingt ein kugelsymmetrisches Halo.	Nicht belegt. Die Rotation allein ist geometrisch mehrdeutig; eine Scheibe kann sie reproduzieren.
Die V7-Scheibe benötigt keine zusätzliche Materie.	Falsch innerhalb der geprüften Profile. Rund 65 % ihrer Masse bleiben selbst bei großzügiger Kalibrierung nicht zugeordnet.
Alle Formen verborgener gewöhnlicher Materie sind durch V7 ausgeschlossen.	Nicht belegt. Unbekannte räumliche Profile und Materiephasen wurden nicht vollständig optimiert und geprüft.
Ein ausgedehnter schwach leuchtender gravitativer Anteil ist eine tragfähige Arbeitshypothese.	Ja, unter Newton; zusätzliche räumliche Kraftproben stützen die Hypothese über reine Rotation hinaus.
Einzelgalaxien identifizieren bereits ein bestimmtes nichtbaryonisches Teilchen.	Nein. Gravitative Erschließung und mikrophysikalische Identifikation sind verschiedene Nachweise.
Modifizierte Dynamik ist durch die M33-Gegenprobe entschieden.	Nein. Die Gegenprobe ist Newtonsch; sie ist kein gemeinsamer Theorienvergleich mit gleicher Daten- und Fehlerbasis.

Tabelle 3. Qualitative Evidenzbilanz. Die Ausdrücke „gut gestützt“ und „nicht belegt“ sind keine numerischen Wahrscheinlichkeiten. Eine globale Prozentangabe wäre ohne festgelegte Alternativen, Priorverteilungen, vollständige Auswahlfunktionen und gemeinsame Likelihood unbegründet.

Eine verborgene Scheibe ist als Gegenhypothese dann stark, wenn sie konkrete unabhängige Vorhersagen macht. Eine beliebige Zusatzdichte, die ausschließlich aus derselben Rotation gewonnen wurde, ist zunächst eine alternative Darstellung des dynamischen Bedarfs. Ein Halo mit beliebig freier Dichte ist in dieser Hinsicht ebenfalls noch keine vollständige Erklärung. Die entscheidende Zusatzleistung liegt in der Erfüllung von Strahlungsgrenzen, vertikalen Kräften, stabilen Verteilungsfunktionen und wiederkehrenden Beziehungen zwischen unterschiedlichen Galaxien.

14. Weiterführende Prüfung an M33

Der nächste methodische Schritt wäre eine gemeinsame Anpassung an die räumlich und spektral aufgelösten Daten, nicht nur an eine bereits reduzierte Rotationskurve. Variiert werden müssten insbesondere die geneigten Ringe, die Linienprofilkomponenten, die endliche Auflösung und ein konsistentes dreidimensionales Kraftfeld. Entfernung, Neigung und baryonische Kalibrierungen wären als gemeinsame Störparameter zu behandeln. So ließen sich korrelierte Unsicherheiten von einer tatsächlich zusätzlichen Kraftkomponente trennen.

Die hypothetische Zusatzmaterie müsste nach ihrer physikalischen Phase parametrisiert werden: atomar, molekular, ionisiert, stellar oder kompakt. Jede Phase erzeugt unterschiedliche Strahlung, Opazität, Druck- und Kollisionsbedingungen. Die passende Zielfunktion würde daher zugleich Rotationsdaten, Linienintensitäten, Absorption, Kontinuumsstrahlung und gegebenenfalls vertikale Struktur berücksichtigen. Eine rein gravitative Zusatzscheibe darf nicht im Nachhinein ohne neue Prüfung vollständig in eine beliebige Phase umbenannt werden.

Die Minimierung der Zusatzmasse sollte außerdem gegen zulässige Änderungen der Dicke, der äußeren Fortsetzung und der Glattheit wiederholt werden. Eine kontrollierte Regularisierung würde unrealistisch schmale Strukturen begrenzen. Daten, die nur als obere Nachweisgrenzen vorliegen, müssten als solche in die Auswertung eingehen. Der Fehler einer digitalisierten Literaturkurve ist getrennt von der ursprünglichen Beobachtungsunsicherheit zu führen.

Vor einer Langzeitsimulation ist ein Gleichgewichtsmodell erforderlich. Für eine kollisionslose Zusatzkomponente muss eine nichtnegative Verteilungsfunktion mit passender radialer und vertikaler Dispersion konstruiert werden. Für eine gasförmige Komponente sind Druck, Kühlung, Heizung und gegebenenfalls magnetische Stützung einzubeziehen. Anschließend kann eine selbstgravitierende Simulation testen, ob sich Balken, Fragmentierung oder zu starke Verdickung entwickeln. Ein Vergleich mit der beobachteten Morphologie und Gasbewegung von M33 würde dann zusätzliche Information liefern.

Schließlich sollten Halo, verborgene Scheibe und modifizierte Dynamik mit derselben Datenauswahl und denselben unabhängigen baryonischen Randbedingungen verglichen werden. Ein Modell mit hunderten Dichtefreiheiten darf nicht allein aufgrund seiner kleineren χ^2-Summe gegenüber einer Theorie mit wenigen Parametern bevorzugt werden. Aussagekräftiger sind vorab festgelegte Vorhersagen für zurückgehaltene Radien, unabhängige Geschwindigkeitskomponenten oder zusätzliche Beobachtungsarten. Diese Arbeitsschritte sind ein Prüfprogramm; sie sind durch V7 noch nicht ausgeführt.

15. Schlussfolgerungen

Die Massenbestimmung einer Galaxie ist eine Kombination mehrerer physikalischer Inversionsprobleme. Rotation bestimmt eine radiale Kraft, Sternkinematik ein von Bahnverteilung und Gleichgewicht abhängiges Potential, Linsengeometrie eine projizierte Masse und Strahlungsdiagnostik bestimmte Materiephasen. Keine dieser Methoden allein liefert ohne Annahmen die vollständige dreidimensionale Zusammensetzung.

Eine Rotationskurve bestimmt insbesondere nicht eindeutig, ob zusätzliche Masse kugelförmig oder scheibenförmig verteilt ist. Die analytische Gegenüberstellung von Kuzmin-Scheibe und Plummer-Kugel beweist diese Mehrdeutigkeit exakt. Eine flache Kurve

kann ebenfalls durch eine Newtonsche Scheibe entstehen. Solche Konstruktionen widerlegen die Ableitung einer notwendigen Kugelform aus der Rotation allein; sie erklären noch nicht die stoffliche Herkunft der dynamisch benötigten Masse.

Die dokumentierten M33-Rechnungen konkretisieren diesen Unterschied. Eine frei rekonstruierte Scheibe reproduziert die veröffentlichte Rotation. Die weiterführende Minimalmassenrechnung senkt die Gesamtmasse in ihrer Modellklasse auf ungefähr $4{,}35 \times 10^{10}\ M_\odot$. Selbst bei großzügig skalierten Stern- und Gasprofilen verbleiben etwa $2{,}83 \times 10^{10}\ M_\odot$ in einer nicht identifizierten Zusatzkomponente. Diese Differenz ist weder ein unmittelbarer Nachweis nichtbaryonischer Teilchen noch durch den Verzicht auf ein Halo verschwunden.

Die Nachweisgrenzen gewöhnlicher Materie sind real und quantitativ relevant. Insbesondere H_2, optisch dickes HI und kalter Staub erlauben keine naive Gleichsetzung von fehlender Strahlung mit fehlender Masse. Für M33 liegt jedoch kein in dieser Arbeit belegtes, physikalisch konsistentes gewöhnliches Reservoir vor, das die benötigte Zusatzmasse vollständig bereitstellt. Seine Stabilität und seine gleichzeitige Verträglichkeit mit verschiedenen Strahlungstracern bleiben offene Anforderungen.

Allein aus Einzelgalaxien ist die Newtonsche Massendiskrepanz als wiederkehrender empirischer Befund gut gestützt. Ein zusätzlicher, großräumiger und schwach leuchtender gravitativer Anteil besitzt dadurch erhebliche Erklärungskraft. Seine Geometrie muss unabhängig geprüft werden; seine nichtbaryonische Identität folgt nicht aus einem Rotationsfit. Modifizierte Dynamik erklärt bedeutende galaktische Skalengesetze, muss aber dieselben Anforderungen an einheitliche Parameter, räumliche Kräfte und unabhängige Daten erfüllen. Die hier ausgeschlossene Haufen- und Kosmologieebene wird für diese Schlussfolgerungen nicht benötigt und auch nicht stillschweigend herangezogen.

Anhang A. Eine exakt flach rotierende Newtonsche Scheibe

Die ideale Mestel-Scheibe liefert ein analytisches Beispiel für eine konstante Kreisgeschwindigkeit ohne Kugelkomponente. Ihre Flächendichte lautet Σ(R) = A/R mit einer positiven Konstante A. Sie ist unendlich dünn, reicht formal unendlich weit und ist im Zentrum singulär. Das Modell ist deshalb eine mathematische Grenzkonstruktion, keine vollständige reale Galaxie.

Für rotationssymmetrische dünne Scheiben lässt sich die radiale Kraft mit einer Bessel-Transformation berechnen. Bessel-Funktionen J_0 und J_1 sind die zylindersymmetrischen Gegenstücke zu Sinus und Kosinus: Sie zerlegen ein radiales Profil in Wellen verschiedener Wellenzahl k. Die Transformation S(k) und die Kreisgeschwindigkeit hängen zusammen durch:

$$S(k) = \int_0^\infty R\Sigma(R) J_0(kR)\, dR, \qquad v_c^2(R) = 2\pi G R \int_0^\infty k S(k) J_1(kR)\, dk \tag{31}$$

Für Σ = A/R wird wegen des Bessel-Integrals $\int_0^\infty J_0(kR)dR = 1/k$ die transformierte Funktion S(k) = A/k. In der Kraftformel bleibt das Integral $\int_0^\infty J_1(kR)dk = 1/R$. Damit ergibt sich unmittelbar:

$$v_c^2 = 2\pi G A, \qquad \Sigma(R) = \frac{v_c^2}{2\pi G R}, \qquad M_{\mathrm{cyl}}(<R) = \frac{v_c^2 R}{G} \tag{32}$$

Die Integrale sind im üblichen regulierten Grenzsinn zu verstehen. Das absolute Potential der unendlich ausgedehnten Scheibe besitzt keine endliche Nullsetzung im Unendlichen; seine radiale Ableitung bleibt wohldefiniert. Die Flachheit der Kurve ist exakt. Zugleich wächst die Gesamtmasse unbegrenzt mit R. Ein endlicher Rand oder ein innerer Kern verändern das Feld, besonders nahe diesen Änderungen. Die letzte Gleichung ähnelt formal der Kugelformel, gilt hier aber nur für dieses spezielle Scheibenprofil und begründet keine allgemeine Übertragung auf Scheiben.

Das Beispiel trennt drei Aussagen: Newton erlaubt flache Scheibenrotation; dafür ist eine bestimmte ausgedehnte Dichte nötig; ob die erforderliche Dichte aus gemessener gewöhnlicher Materie besteht, wird durch die mathematische Konstruktion nicht entschieden. Die endlichen V5/V7-Modelle berechnen gerade die Rand- und Dickeneffekte, die diese Idealisierung auslässt.

Anhang B. Mittelungen, Einheiten und Reproduzierbarkeit

Für einen Ring zwischen a und b ist der korrekte Flächendichtemittelwert die eingeschlossene Ringmasse geteilt durch $\pi(b^2 - a^2)$. Die notwendige radiale Gewichtung lautet:

$$\overline{\Sigma}_{[a,b]} = \frac{2}{b^2 - a^2} \int_a^b R\Sigma(R)\, dR \tag{33}$$

Ein einfacher Mittelwert gleichabständiger Radialwerte gewichtet innere und äußere Flächen falsch. Ebenso wenig dürfen Flächendichten nur erkannter heller Pixel ohne Berücksichtigung ihres Flächenanteils als Mittelwert einer vollständigen Galaxienscheibe behandelt werden. V6

dokumentiert die gemeinsame Mittelung für den inneren Vergleich; die großzügigen Außenannahmen von V7 bleiben gesondert gekennzeichnet.

Für numerische Größenordnungen wird $G = 4{,}300917 \times 10^{-6}$ kpc $(\mathrm{km/s})^2/M_\odot$ verwendet. Eine Fläche von einem kpc^2 enthält 10^6 pc^2. Die Umrechnung von Wasserstoffsäule zu Flächendichte ergibt 1 $M_\odot/\mathrm{pc}^2$ ungefähr gleich $1{,}25 \times 10^{20}$ Wasserstoffatomen/cm^2, bevor Helium berücksichtigt wird. Wird die gesamte Gasflächendichte einschließlich Helium verwendet, ist der Wasserstoffanteil entsprechend zu dividieren.

Die vorliegende Ausgabe übernimmt die geprüften numerischen Ausgaben der Studien V5–V8. Das Begleitpaket enthält den vollständigen Manuskriptquelltext, die Abbildungsprogramme, die für die Abbildungen verwendeten CSV-Dateien und die wesentlichen Ergebnistabellen. Die PDFs der ursprünglichen Rechenstudien und deren numerische Programme sind zur Nachvollziehbarkeit der Optimierungen beigefügt. Die erneute Erzeugung dieses Artikels stellt die Abbildungen aus archivierten Ergebnissen her; sie führt nicht automatisch sämtliche Optimierungen neu aus.

Die Zahl signifikanter Stellen im Text richtet sich nach der methodischen Aussagekraft. Mehr Stellen in den maschinenlesbaren Dateien dienen der Reproduzierbarkeit, nicht einer behaupteten astronomischen Messpräzision. Bild und Diagramme enthalten keine generierten astronomischen Strukturen. Die Titelaufnahme wird als Fotografie mit Bildnachweis wiedergegeben; ihre Belichtungsdauer wird mangels für diese Datei gesicherter Metadaten nicht angegeben.

Anhang C. Das Entfernungsnetz der M33-Aufnahme

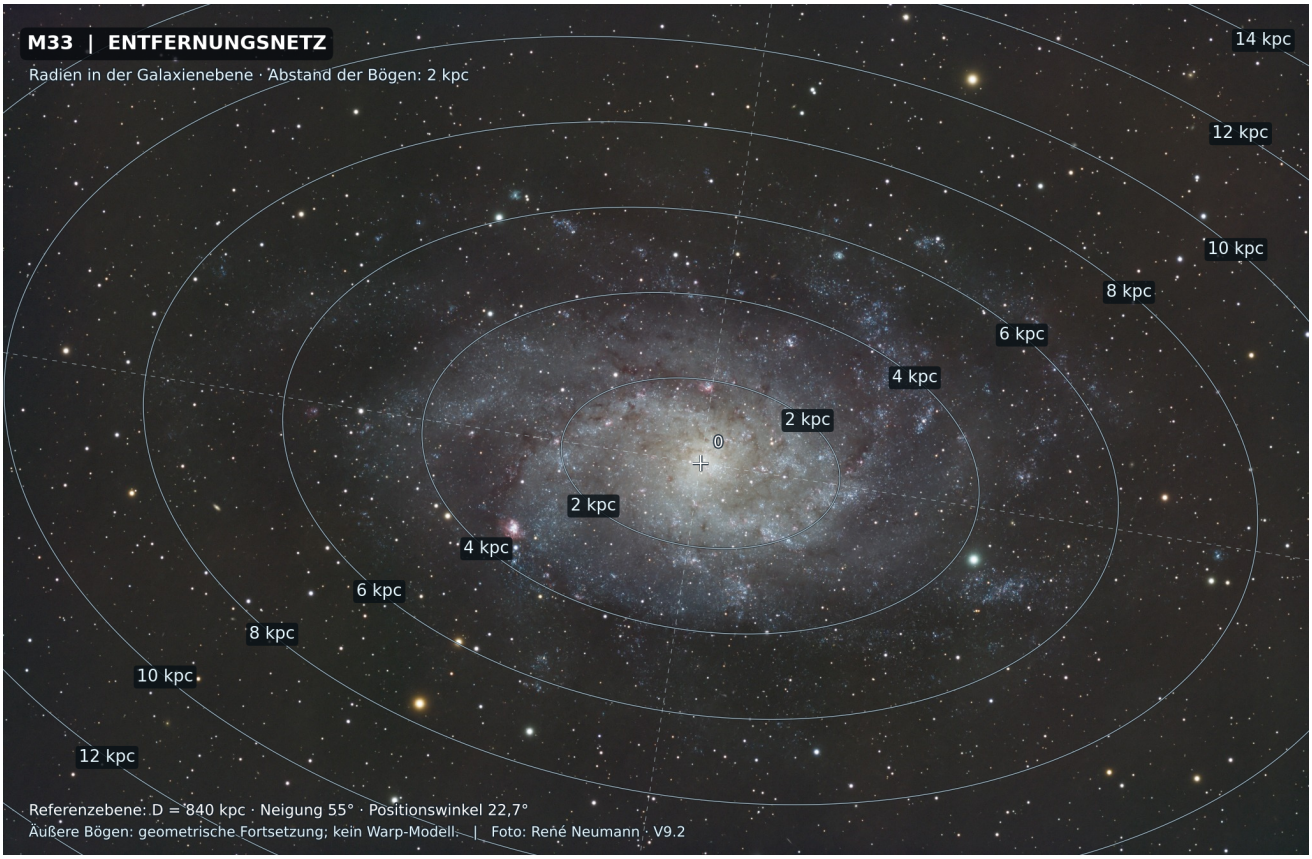


Abbildung 7. Originalaufnahme von René Neumann mit mathematisch projiziertem Radialnetz. Das Kreuz kennzeichnet das registrierte Galaxienzentrum. Die hellen Ellipsen beziehungsweise am Bildrand angeschnittenen Bögen markieren R = 2, 4, 6, 8, 10, 12 und 14 kpc. Die gestrichelten Geraden zeigen die projizierten Hauptachsen der Referenzscheibe. Die äußersten Bögen sind nur in kleinen Teilen des Bildfelds sichtbar. Das Foto wurde nicht zur Massenbestimmung verwendet.

Ein Kreis in einer geneigten, dünnen Scheibe erscheint am Himmel als Ellipse. Entlang ihrer langen Achse bleibt der Radius unverkürzt; entlang der kurzen Achse wird er um den Faktor cos i verkürzt. Bei i = 55° beträgt dieser Faktor rund 0,574. Ein gewöhnliches Kreisraster auf dem Foto würde deshalb unterschiedliche physische Radien miteinander verwechseln. Ein Kiloparsec entspricht ungefähr 3260 Lichtjahren.

$$R = \sqrt{x^2 + (y/\cos i)^2}\,, \qquad x = D\,\xi, \quad y = D\,\eta \tag{34}$$

Hier sind ξ und η die kleinen Winkelabstände vom Zentrum entlang der projizierten langen und kurzen Scheibenachse, gemessen im Bogenmaß; x und y sind die zugehörigen linearen Abstände in der Himmelsebene. Für die Zeichnung wird ein Kreis mit Koordinaten (R cos θ, R sin θ) zunächst geneigt, dann um den Positionswinkel 22,7° östlich von Himmelsnord gedreht und schließlich mit der archivierten astrometrischen Registrierung in die Pixelkoordinaten des Originalfotos übertragen. Der Bezugspunkt liegt bei x = 1093,37 und y = 719,44 Pixel, vom linken oberen Bildrand aus gezählt; diese Bildkoordinaten sind von x und y in Gleichung (34) zu unterscheiden.

Zum Vergleich mit einer Rotations- oder Dichtekurve wird der Radius eines Bogens auf deren waagerechter R-Achse aufgesucht. Ein Zwischenraum von beispielsweise 4 bis 6 kpc entspricht einem vollständigen Ring in der Referenzscheibe. Er bedeutet weder einen

konstanten Pixelabstand in beliebiger Bildrichtung noch eine scharfe Grenze der sichtbaren oder gravitativen Materieverteilung. Die Rotationsdaten reichen bis 22,72 kpc und damit deutlich über das fotografische Bildfeld hinaus.

Die Referenzebene stellt eine geometrische Orientierung dar. M33 besitzt außen einen Warp, also eine radial veränderliche Neigung und Orientierung der Scheibe. Ein symmetrisches Netz mit festen Winkeln bildet diese Verformung absichtlich nicht nach; seine äußeren Radien sind daher Referenzradien und keine präzise Zuordnung jedes äußeren HI-Messpunkts. Für Letzteres wäre die jeweilige Geometrie der kinematischen Ringrekonstruktion erforderlich. Entfernung, Neigung und Registrierung sind Modell- beziehungsweise Messannahmen; die geometrisch genaue Zeichnung hebt deren Unsicherheiten nicht auf.

Literatur und dokumentierte Rechenstudien

Stand der Literaturprüfung: 23. November 2026. Nummerierte Verweise beziehen sich auf die nachstehenden Primärarbeiten, die technische Dokumentation oder die archivierten Rechenstudien. Letztere sind keine begutachteten Zeitschriftenpublikationen. Ihre Ergebnisse werden im Artikel ausdrücklich von unabhängigen Beobachtungen getrennt.

[1] Retzlaff, K. (2013). Keine Dunkle Materie in der Milchstraße bis 15 kpc? Abschätzung der Gesamtmasse und Spiralarmstrukturen. Manuskript vom 13.01.2013; archivierte Modellvorlage, keine hier vorausgesetzte Massenmessung.

[2] M33 Bulge–Scheibe (2026), Version 5. Numerische Modellstudie mit Rotationstabelle, Kraftintegration und Stabilitätsprüfungen. Archivierter Bericht und Rechenprogramm im Begleitpaket.

[3] M33 Baryonenvergleich (2026), Version 6. Vergleich der dynamischen Flächendichte mit Gas, Infrarotlicht und einem getrennten photometrischen Sternmassenmodell. Archivierter Bericht und Rechenprogramm im Begleitpaket.

[4] M33 Minimalmasse (2026), Version 7. Lineare Massenoptimierung einer endlichen Scheibe, Parameterbereiche, numerische Verifikation und Einzelbahntests. Archivierter Bericht und Rechenprogramm im Begleitpaket.

[5] M33 Nachweisgrenzen (2026), Version 8. Materie- und Massendetektion, HI-Opazität, Staubtemperatur und bedingte Signalabschätzungen. Archivierter Bericht und Rechenprogramm im Begleitpaket.

[6] Corbelli, E., Thilker, D., Zibetti, S., Giovanardi, C. & Salucci, P. (2014). Dynamical signatures of a ΛCDM-halo and the distribution of the baryons in M33. Astronomy & Astrophysics 572, A23. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424033

[7] Kam, Z. S. et al. (2017). H I Kinematics and Mass Distribution of Messier 33. The Astronomical Journal 154, 41. https://arxiv.org/abs/1706.04248

[8] Druard, C. et al. (2014). The IRAM M33 CO(2–1) survey: A complete census of the molecular gas. Astronomy & Astrophysics 567, A118. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201423682

[9] Verley, S., Corbelli, E., Giovanardi, C. & Hunt, L. K. (2009). Star formation in M33: multiwavelength signatures across the disk. Astronomy & Astrophysics 493, 453–466. https://doi.org/10.1051/0004-6361:200810566

[10] Koch, E. W. et al. (2021). A lack of constraints on the cold opaque H I mass: H I spectra in M31 and M33 prefer multi-component models over a single cold opaque component. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 504, 1801. https://doi.org/10.1093/mnras/stab981

[11] Gratier, P. et al. (2017). The molecular gas mass of M33. Astronomy & Astrophysics 600, A27. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629300

[12] Keilmann, E. et al. (2024). Molecular Cloud Matching in CO and Dust in M33. I. High-Resolution Hydrogen Column Density Maps from Herschel. Astronomy & Astrophysics. https://doi.org/10.1051/0004-6361/202349027

[13] Bluhm, H. et al. (2003). Interstellar H_2 in M33 detected with FUSE. Astronomy & Astrophysics 398, 983–992. https://doi.org/10.1051/0004-6361:20021725

[14] Mookerjea, B. et al. (2016). Velocity resolved [CII] spectroscopy of the center and the BCLMP 302 region of M33 (HerM33es). Astronomy & Astrophysics 586, A37. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527366

[15] Keenan, O., Davies, J., Taylor, R. & Minchin, R. (2016). The Arecibo Galaxy Environment Survey X: The Structure of Halo Gas Around M33. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 456, 951–960. https://doi.org/10.1093/mnras/stv2684

[16] NRAO. VLA Observational Status Summary: Resolution. Offizielle technische Dokumentation zu Winkelauflösung und größten erfassbaren Winkelskalen; abgerufen am 23.11.2026. https://science.nrao.edu/facilities/vla/docs/manuals/oss/performance/resolution

[17] Wolf, J. et al. (2010). Accurate masses for dispersion-supported galaxies. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 406, 1220–1237. https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16753.x

[18] Schutz, K., Lin, T., Safdi, B. R. & Wu, C.-L. (2018). Constraining a Thin Dark Matter Disk with Gaia. Physical Review Letters 121, 081101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.081101

[19] Bovy, J., Bahmanyar, A., Fritz, T. K. & Kallivayalil, N. (2016). The shape of the inner Milky Way halo from observations of the Pal 5 and GD-1 stellar streams. The Astrophysical Journal 833, 31. https://doi.org/10.3847/1538-4357/833/1/31

[20] Auger, M. W. et al. (2010). The Sloan Lens ACS Survey. X. Stellar, Dynamical, and Total Mass Correlations of Massive Early-type Galaxies. The Astrophysical Journal 724, 511–525. https://doi.org/10.1088/0004-637X/724/1/511

[21] Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. The Astrophysical Journal 139, 1217–1238. https://doi.org/10.1086/147861

[22] Sellwood, J. A., Shen, J. & Li, Z. (2019). The global stability of M33: still a puzzle. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 486, 4710. https://doi.org/10.1093/mnras/stz1145

[23] DeRocco, W., Smyth, N. & Profumo, S. (2024). Constraints on sub-terrestrial free-floating planets from Subaru microlensing observations. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 527, 8921–8930. https://doi.org/10.1093/mnras/stad3824

[24] Lelli, F., McGaugh, S. S. & Schombert, J. M. (2016). SPARC: Mass Models for 175 Disk Galaxies with Spitzer Photometry and Accurate Rotation Curves. The Astronomical Journal 152, 157. https://doi.org/10.3847/0004-6256/152/6/157

[25] McGaugh, S. S., Lelli, F. & Schombert, J. M. (2016). Radial Acceleration Relation in Rotationally Supported Galaxies. Physical Review Letters 117, 201101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.201101

[26] McGaugh, S. S. (2012). The Baryonic Tully-Fisher Relation of Gas-rich Galaxies as a Test of ΛCDM and MOND. The Astronomical Journal 143, 40. https://doi.org/10.1088/0004-6256/143/2/40

[27] de Blok, W. J. G. et al. (2008). High-Resolution Rotation Curves and Galaxy Mass Models from THINGS. The Astronomical Journal 136, 2648. https://doi.org/10.1088/0004-6256/136/6/2648

[28] Bekenstein, J. & Milgrom, M. (1984). Does the missing mass problem signal the breakdown of Newtonian gravity? The Astrophysical Journal 286, 7–14. https://doi.org/10.1086/162570

[29] Smith, A. et al. (2026). Dark Matter and MOND successes and degeneracies in reproducing SPARC rotation curves and weak lensing data. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, angenommenes Manuskript, online 10.11.2026. Hier ausschließlich zur Einzelgalaxien-Rotationsanalyse herangezogen. https://doi.org/10.1093/mnras/stag2148

[30] Coquery, E. & Blanchard, A. (2025). Cosmological implications of the Gaia Milky Way declining rotation curve. Astronomy & Astrophysics 703, A88. Hier ausschließlich zur Milchstraßen-Rotation herangezogen. https://doi.org/10.1051/0004-6361/202556337

[31] Koop, O. et al. (2024). On the Galactic rotation curve inferred from the Jeans equations: Assessing its robustness using Gaia DR3 and cosmological simulations. Astronomy & Astrophysics 692, A50. Hier als Kinematik- und Methodentest verwendet. https://doi.org/10.1051/0004-6361/202450911

[32] Zheng, Y., Peek, J. E. G., Werk, J. K. & Putman, M. E. (2017). HST/COS Observations of Ionized Gas Accretion at the Disk-halo Interface of M33. The Astrophysical Journal 834, 179. https://doi.org/10.3847/1538-4357/834/2/179

[33] Tisserand, P. et al. (2007). Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds. Astronomy & Astrophysics 469, 387–404. https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066017