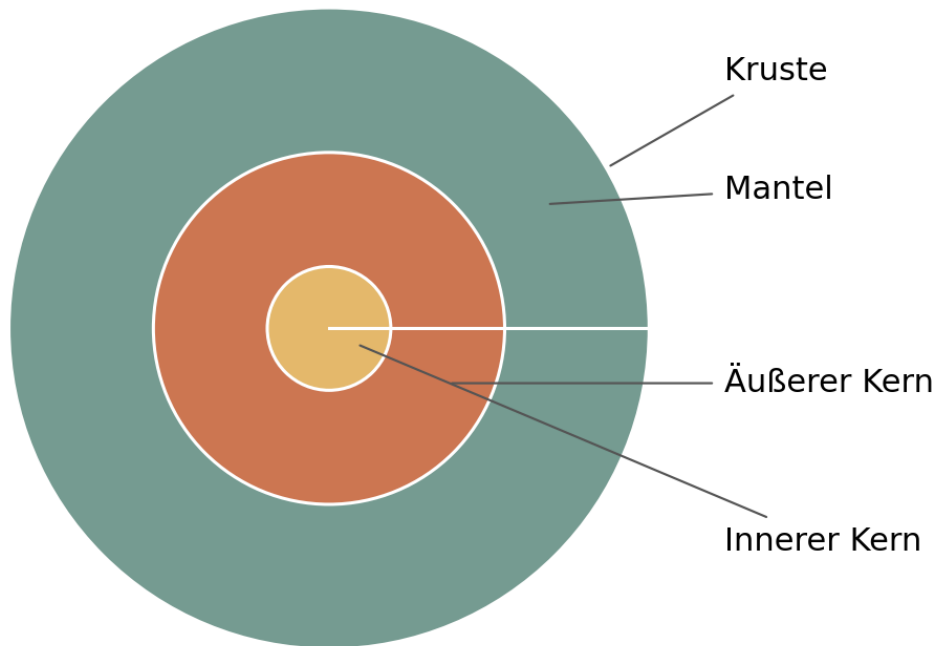


Mit Stein und Pendel ins Erdinnere

*Experimente und mathematische Modelle
zum Aufbau der Erde*

Dr. Klaus Retzlaff



Schematische Gliederung der Erde

Version 1.1
13. Oktober 2026

Impressum

Autor und Herausgeber

Dr. Klaus Retzlaff

Titel

Mit Stein und Pendel ins Erdinnere

Experimente und mathematische Modelle zum Aufbau der Erde

Ausgabe

Version 1.1 vom 13. Oktober 2026

Überarbeitete Buchfassung

Urhebervermerk

© 2026 Dr. Klaus Retzlaff

Fachliche Grundlage

Vortrag und Präsentation von Dr. Klaus Retzlaff zum Thema Wie man mit Hausmitteln das Erdinnere ausmisst. Ergänzende Fachquellen sind im Quellenverzeichnis ausgewiesen.

Redaktion und Gestaltung

Sprachliche Ausarbeitung, ergänzende Erläuterungen, Diagramme und Satz entstanden mit Unterstützung von ChatGPT.

Abbildungen

Die Fotografien des Steinversuchs stammen aus der zugrunde liegenden Präsentation. Die schematischen Zeichnungen und mathematischen Diagramme wurden für die Buchfassung erstellt. Datenquellen und Modellannahmen sind bei den Abbildungen und im Quellenverzeichnis angegeben.

Änderungen in Version 1.1

Impressum ergänzt, Inhaltsverzeichnis mit rechtsbündiger Zahlenspalte gestaltet, abgesetzte Formeln fortlaufend nummeriert und das Glossar um ausführliche allgemeinverständliche Erklärungen erweitert.

Zitierempfehlung

Retzlaff, Klaus (2026): Mit Stein und Pendel ins Erdinnere. Experimente und mathematische Modelle zum Aufbau der Erde. Version 1.1.

Inhalt

Impressum	2
Vorwort	4
1 Wie einfache Messungen das Erdinnere erschließen	5
2 Dichte als Schlüsselgröße	6
3 Der Steinversuch	7
4 Wie genau ist die Messung	10
5 Größe und Masse der Erde	12
6 Ein lineares Modell der Erddichte	13
7 Gravitation im Erdinneren	16
8 Der Druck bis zum Erdmittelpunkt	17
9 Das Pendel als Messgerät für die Schwere	20
10 Den Erdradius aus einem Höhenvergleich bestimmen	22
11 Was einen realen Pendelvergleich schwierig macht	25
12 Der Vergleich mit dem gegliederten Erdaufbau	27
13 Wie eindeutig ist der Schluss auf das Erdinnere	29
14 Ein Arbeitsprogramm für eigene Untersuchungen	31
Anhang A Die Herleitungen im Zusammenhang	33
Anhang B Rechenwerte und Messprotokolle	35
Anhang C Aufgaben mit erläuterten Lösungen	36
Anhang D Begriffe und Formelzeichen	38
Anhang E Abgleich mit dem Ausgangsmaterial	46
Quellen und Literatur	47

Vorwort

Ein Stein, ein Gefäß mit Wasser und eine Küchenwaage reichen aus, um die Dichte eines Gesteins zu bestimmen. Ein Pendel verbindet eine gemessene Zeit mit der Schwere am Beobachtungsort. Zwischen solchen Alltagsversuchen und Aussagen über das Erdinnere liegen physikalische Gesetze und mathematische Modelle. Sie ermöglichen es, aus zugänglichen Beobachtungen auf Verhältnisse zu schließen, die einer unmittelbaren Untersuchung entzogen sind.

Die leitende Frage dieses Buches lautet, wie weit dieser Schluss tragen kann. Ein Gesteinsstück liefert eine lokale Dichte. Die Masse und die Größe der Erde bestimmen deren mittlere Dichte. Wird zusätzlich ein einfacher radialer Dichteverlauf angenommen, lassen sich die Dichte im Mittelpunkt, die Gravitationsbeschleunigung im Inneren und der Druck bis zum Zentrum berechnen. Das Ergebnis liegt in einer bemerkenswert realistischen Größenordnung. Zugleich zeigt die Rechnung genau, an welchen Stellen zusätzliche Messungen erforderlich werden.

Der Gedankengang beginnt bei einer tatsächlich dokumentierten Gesteinsmessung. Jeder wesentliche Rechenschritt wird entwickelt und physikalisch erläutert. Die mathematischen Abschnitte setzen grundlegende Algebra voraus. Integrale werden zunächst als Summen dünner Kugelschalen verständlich gemacht. Wer die vertiefenden Herleitungen zunächst überspringt, kann den experimentellen und begrifflichen Zusammenhang dennoch verfolgen.

Die Erde besitzt einen gegliederten Aufbau. Ein geradliniger Dichteverlauf bildet diese Gliederung nur sehr grob ab. Seine Stärke liegt in der Überschaubarkeit: Es lässt sich vollständig nachvollziehen, welche Voraussetzungen zu welchem Ergebnis führen. Der Vergleich mit einem geophysikalischen Referenzmodell macht anschließend sichtbar, welche Einzelheiten das einfache Modell erfasst und welche ihm fehlen.

Das Buch richtet sich an naturwissenschaftlich interessierte Leser, an Lehrende und an Arbeitsgemeinschaften, die Experimente mit anspruchsvollen Fragestellungen verbinden möchten. Es behandelt Messunsicherheiten ebenso ausführlich wie die Rechnung. Die Gesteinsmessung ist mit Haushaltsmitteln gut durchführbar. Die Bestimmung des Erdradius aus dem Gang eines Pendels stellt wesentlich höhere Anforderungen. Gerade dieser Unterschied gehört zum Erkenntnisgewinn.

1 Wie einfache Messungen das Erdinnere erschließen

Die Frage nach dem Verborgenen

Ein Foto zeigt die Oberfläche eines Steins. Eine Bohrung erschließt einen schmalen Ausschnitt des Untergrunds. Für den größten Teil des Erdinneren stehen solche direkten Zugänge nicht zur Verfügung. Dennoch wirken die dort vorhandenen Massen auf die Umgebung, und Erdbebenwellen durchlaufen den Erdkörper. Die physikalischen Eigenschaften des Inneren hinterlassen messbare Wirkungen außerhalb des unmittelbar zugänglichen Bereichs.

Die Aufgabe besteht darin, diese Wirkungen zu deuten. Dazu wird zunächst beschrieben, welches Signal ein bestimmter angenommener Erdaufbau erzeugen würde. Anschließend lässt sich prüfen, ob das berechnete Signal zur Beobachtung passt. Dieses Verfahren führt von einem Modell zu seinen Konsequenzen und von der Beobachtung zurück zu möglichen Modellen. Beide Richtungen müssen auseinandergehalten werden, weil mehrere verschiedene innere Strukturen dieselbe äußere Wirkung besitzen können.

Ein einfaches Beispiel liefert die Masse einer geschlossenen Kiste. Die Waage bestimmt die Gesamtmasse einschließlich der Kiste. Sie verrät weder die Anzahl der enthaltenen Gegenstände noch deren räumliche Anordnung. Zusätzliche Beobachtungen, etwa das Verhalten beim Drehen oder eine Schallmessung, können die Möglichkeiten einschränken. Die Erdmasse besitzt einen vergleichbaren Informationsgehalt: Sie ist ein grundlegender Befund, legt aber den inneren Aufbau noch nicht eindeutig fest.

Die Abfolge der Untersuchung

Der erste Versuch bestimmt Masse und Volumen eines Steins. Ihr Verhältnis ist die Dichte. Im dokumentierten Beispiel ergeben 883 Gramm Masse und 324,8 Kubikzentimeter Volumen eine Gesteinsdichte von rund 2,72 Gramm je Kubikzentimeter. Diese Zahl wird als Näherung für eine oberflächennahe Gesteinsdichte verwendet.

Die mittlere Erddichte beträgt dagegen rund 5,51 Gramm je Kubikzentimeter. Der Unterschied verlangt nach einer Erklärung. Wäre die gesamte Erde mit derselben Dichte wie die Probe aufgebaut, hätte sie bei ihrer bekannten Größe nur ungefähr die halbe tatsächliche Masse. Folglich muss ein beträchtlicher Teil des Erdinneren dichter sein als dieses oberflächennahe Gestein.

Für den nächsten Schritt wird eine bestimmte mathematische Form gewählt: Die Dichte soll sich mit dem Abstand vom Mittelpunkt linear ändern. Oberflächenwert und Gesamtmasse legen die beiden Parameter dieser Geraden fest. Daraus folgt eine Dichte von rund 13,9 Gramm je Kubikzentimeter im Mittelpunkt. Die Zahl ist ein Ergebnis innerhalb der gewählten Modellklasse. Eine andere Modellform kann bei denselben Ausgangsdaten eine andere Zentraldichte liefern.

Mit der berechneten Massenverteilung lässt sich die Gravitationsbeschleunigung an jedem Radius bestimmen. Das Gewicht der darüberliegenden Schichten erzeugt einen Druck, der nach innen zunimmt. Eine weitere Integration liefert für das lineare Modell etwa 333 Gigapascal im Zentrum. Damit erschließt sich aus wenigen Ausgangsgrößen ein vollständiger, überprüfbarer Zusammenhang zwischen Dichte, Masse, Gravitation und Druck.

Messung und Voraussetzung

Zu jeder Zahl gehört ihre Herkunft. Die Masse des Steins wird an der Waage abgelesen. Sein Volumen folgt aus einer Wasserverdrängung. Die Erdmasse und der Erdradius sind im ersten Rechengang übernommene Referenzgrößen. Kugelsymmetrie und linearer Dichteverlauf sind Annahmen. Die Zentralschicht und der Zentraldruck sind daraus berechnete Modellgrößen.

Diese Unterscheidung ist für die gesamte Untersuchung verbindlich. Eine berechnete Zahl gewinnt ihre Aussagekraft durch die Güte der Messwerte und die Angemessenheit der Voraussetzungen. Viele Nachkommastellen ändern daran nichts. Eine sauber ausgewiesene Näherung ist wissenschaftlich wertvoller als eine scheinbar genaue Zahl, deren Herkunft unklar bleibt.

Der spätere Pendelversuch greift die bisher vorausgesetzten Erdgrößen auf. Er zeigt, wie die örtliche Schwere und unter idealisierten Bedingungen auch der Erdradius aus Messungen zugänglich werden. Die Gravitationskonstante bleibt dabei eine zusätzliche, unabhängig bestimmte Größe. Das Experiment schließt also einen Teil der Erkenntniskette, ohne sämtliche Voraussetzungen der Physik selbst neu zu vermessen.

2 Dichte als Schlüsselgröße

Masse und Volumen gehören zusammen

Ein kleines Metallstück kann mehr Masse besitzen als ein großer Holzklotz. Die Größe eines Gegenstands allein sagt daher wenig über seine Masse aus. Die Dichte setzt beide Größen ins Verhältnis. Das Formelzeichen ρ , gesprochen Rho, bezeichnet die Masse pro Volumeneinheit.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

Für ein gleichmäßig aufgebautes Material bedeutet eine Dichte von $2,72 \text{ g/cm}^3$, dass jeder Kubikzentimeter dieses Materials ungefähr $2,72 \text{ Gramm}$ Masse enthält. Ein Würfel mit zehn Zentimetern Kantenlänge hat ein Volumen von 1.000 cm^3 . Aus demselben Material hätte er eine Masse von etwa 2.720 Gramm . Die Dichte bleibt bei einer bloßen Änderung der Probengröße gleich, solange Materialzusammensetzung, Temperatur, Druck und Porenanteil gleich bleiben.

Die gebräuchlichen Einheiten lassen sich unmittelbar umrechnen. Ein Milliliter entspricht einem Kubikzentimeter. Ein Liter enthält 1.000 Milliliter . Ein Kubikmeter umfasst eine Million Kubikzentimeter. Da ein Kilogramm 1.000 Gramm enthält, gilt die für dieses Buch zentrale Beziehung:

$$1 \text{ g/cm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3 \quad (2)$$

Die Schreibweise $2,72 \text{ g/cm}^3$ und die Schreibweise 2.720 kg/m^3 bezeichnen folglich dieselbe Dichte. Für die Verbindung mit der Gravitationskonstante werden Rechnungen konsequent in Metern, Kilogramm und Sekunden durchgeführt. Das verhindert Fehler, die beim unbemerkten Wechsel zwischen Zentimetern und Metern entstehen können.

Was ein Gestein repräsentiert

Granit entsteht durch die langsame Erstarrung einer silikatreichen Schmelze in der Erdkruste. Seine sichtbaren Mineralkörner gehören vor allem zu Feldspäten, Quarz und Glimmern. Ein granitisches Gestein ist deshalb ein sinnvoller Ausgangspunkt für eine Untersuchung kontinentaler Krustengesteine. Die Präsentation bezeichnet die untersuchte Probe als norwegischen Granit [1].

Ein einzelner Stein repräsentiert allerdings zunächst seine eigene Zusammensetzung und Porosität. Selbst eine sicher bestimmte Granitprobe ist kein vollständiger Querschnitt durch die Erdkruste. Kontinentale und ozeanische Kruste unterscheiden sich, und auch innerhalb der kontinentalen Kruste treten verschiedene Gesteinsarten auf. Im vorliegenden Modell dient die gemessene Probendichte als vereinfachter äußerer Randwert. Diese Verwendung ist eine begründete Näherung mit begrenzter Reichweite.

Eine fotografische Ansicht allein genügt für eine verlässliche petrographische Bestimmung nicht in jedem Fall. Eine verwitterte oder nasse Oberfläche kann typische Merkmale verdecken. Für die Dichteberechnung ist die genaue Gesteinsbezeichnung zunächst entbehrlich: Gemessen werden Masse und verdrängtes Volumen. Erst bei der Übertragung des Resultats auf die Erde wird die geologische Einordnung wichtig.

Dichte unter Druck

Die Dichte eines Stoffes ist keine unveränderliche Kennzahl. Druck kann das Volumen einer gegebenen Masse verringern und dadurch die Dichte erhöhen. Erwärmung vergrößert bei vielen Stoffen unter vergleichbaren Bedingungen das Volumen. Außerdem können Minerale bei hohen Drücken ihre Kristallstruktur ändern. Dieselben chemischen Bestandteile können dann dichter gepackt sein.

Die hohe Dichte des Erdinneren hat deshalb mehrere Ursachen. Die Materialzusammensetzung verändert sich mit der Tiefe, und der Druck komprimiert die vorhandenen Stoffe. Eine hohe Dichte allein identifiziert weder ein bestimmtes chemisches Element noch einen Aggregatzustand. Zur Unterscheidung werden weitere Informationen benötigt, etwa aus seismischen Beobachtungen und Hochdruckexperimenten.

Auch beim Steinversuch spielt die Definition des Volumens eine Rolle. Enthält die Probe offene Poren, in die Wasser eindringt, kann das verdrängte Volumen im Laufe der Messung abnehmen. Geschlossene Hohlräume werden dagegen zusammen mit dem Gesteinskörper erfasst. Die aus Masse und äußerem Volumen bestimmte Dichte kann daher von der Dichte der reinen Mineralbestandteile abweichen.

3 Der Steinversuch

Geräte und Vorbereitung

Für den grundlegenden Versuch werden eine geeignete Gesteinsprobe, eine Waage, ein ausreichend großes Messgefäß, Wasser und ein dünner Faden benötigt. Die Probe muss vollständig in das Gefäß passen. Der Wasserstand darf nach dem Eintauchen die Skala oder den oberen Gefäßrand nicht überschreiten. Ein standsicherer Aufbau und ein vorsichtiges Absenken verhindern, dass Wasser verloren geht oder das Gefäß beschädigt wird.

Die Waage steht auf einer festen, waagerechten Unterlage. Vor dem Wiegen wird ihre Nullanzeige geprüft. Ein bekanntes Prüfgewicht kann eine grobe Abweichung erkennen lassen. Das Ausgangsmaterial dokumentiert neben dem Stein eine Kontrolle mit einem als 100 Gramm ausgewiesenen Gewicht. Eine solche Prüfung ersetzt keine vollständige Kalibrierung, erhöht aber die Nachvollziehbarkeit des Versuchs.

Der Stein wird zunächst trocken gewogen. Anhaftendes Wasser würde zur gemessenen Masse beitragen, obwohl bei der anschließenden Volumenbestimmung nicht dieselbe eindeutig abgegrenzte Probe vorliegt. Bei stark porösem Material muss der Feuchtezustand ausdrücklich festgelegt werden. Für eine erste Messung eignet sich eine kompakte, wenig poröse Probe besser.

Steinvolumen = verdrängtes Wasservolumen

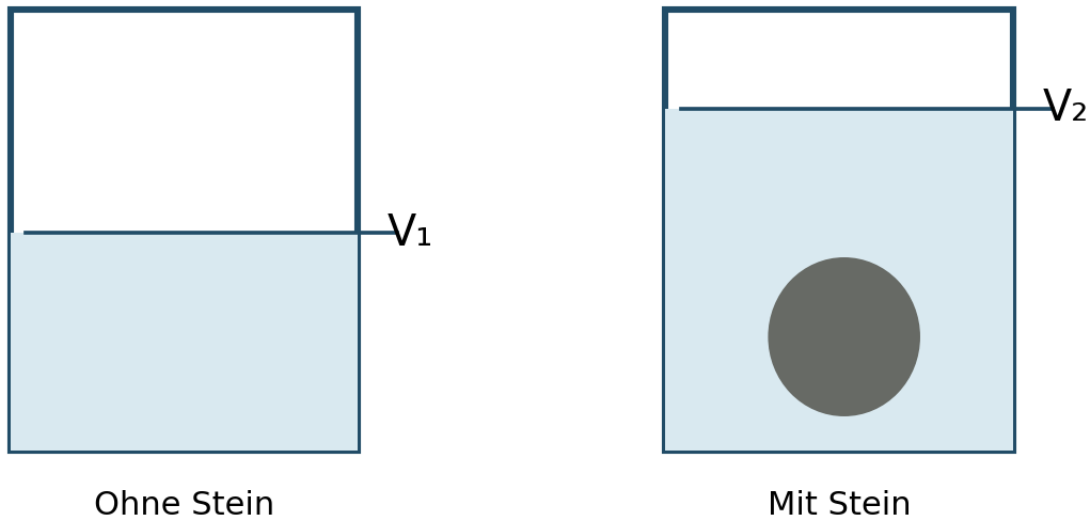


Abbildung 1. Die Zunahme des Wasserstands liefert das verdrängte Volumen. Die Zeichnung erläutert das Messprinzip und stellt keine zusätzliche Messung dar.

Bestimmung des Volumens

Ein unregelmäßig geformter Stein lässt sich kaum durch einige Längenmessungen geometrisch vermessen. Das Wasser übernimmt diese Aufgabe. Zunächst wird das Volumen des Wassers ohne Stein abgelesen. Nach vollständigem Eintauchen folgt eine zweite Ablesung. Die Differenz entspricht dem verdrängten Volumen.

$$V_{\text{Stein}} = V_{\text{mit}} - V_{\text{ohne}} \quad (3)$$

Der Blick soll sich auf Höhe des Meniskus befinden. Dieser gekrümmte Flüssigkeitsspiegel kann bei einer schrägen Blickrichtung eine falsche Ablesung erzeugen. Für Wasser in einem geeigneten Gefäß wird die Skala üblicherweise am tiefsten Punkt des Meniskus gelesen. Entscheidend ist, beide Messungen nach derselben Regel durchzuführen.

Die Probe muss vollständig unter Wasser liegen. Anhaftende Luftblasen erhöhen das verdrängte Volumen und führen dadurch zu einer zu kleinen berechneten Dichte. Ein dünner Faden verdrängt ebenfalls Wasser. Sein Beitrag ist bei einer großen Probe oft klein, sollte aber bei höherem Genauigkeitsanspruch durch eine eigene Kontrollmessung bestimmt werden. Das Gefäß darf zwischen den Ablesungen weder Wasser verlieren noch zusätzliches Wasser erhalten.

Rekonstruktion der dokumentierten Messung

In der Vorlage werden zwei Markierungen des Gefäßes mit einem angelegten Maßstab verbunden. Die 1.000-ml-Marke liegt bei etwa 18 cm, die 600-ml-Marke bei etwa 23 cm der abgebildeten Längenskala. Die Zahlen des Maßstabs wachsen nach unten. Eine größere Wassermenge entspricht deshalb einem kleineren abgelesenen Längenwert. Zwischen den Marken liegen 400 ml auf 5 cm.

$$k = \frac{1000 - 600}{23 - 18} \text{ ml/cm} = 80 \text{ ml/cm} \quad (4)$$

Als Wasserstände werden 18,58 cm mit Stein und 22,64 cm ohne Stein angesetzt. Daraus folgt ein Höhenunterschied von 4,06 cm und damit das Volumen:

$$V = 80 \text{ ml/cm} \cdot 4,06 \text{ cm} = 324,8 \text{ ml} \quad (5)$$

Die an einzelnen Stellen der Vortragsfolie verwendete Einheit Millimeter passt weder zur abgebildeten Skala noch zur anschließenden Multiplikation. Die konsistente Einheit ist hier Zentimeter. Mit einer Differenz von nur 4,06 mm ergäbe sich bei derselben Kalibrierung ein zehnmal kleineres Volumen und eine unplausibel hohe Gesteinsdichte. Die Einheitenkontrolle löst die Unstimmigkeit eindeutig.

Die lineare Umrechnung zwischen Längenskala und Volumen setzt voraus, dass das Gefäß im betreffenden Abschnitt einen annähernd konstanten Querschnitt besitzt. Bei einem nach oben breiter werdenden Gefäß ist eine konstante Anzahl Milliliter je Zentimeter im Allgemeinen falsch. In diesem Fall wird die Volumenskala direkt benutzt oder eine feinere Kalibrierung mit bekannten Wassermengen angelegt.

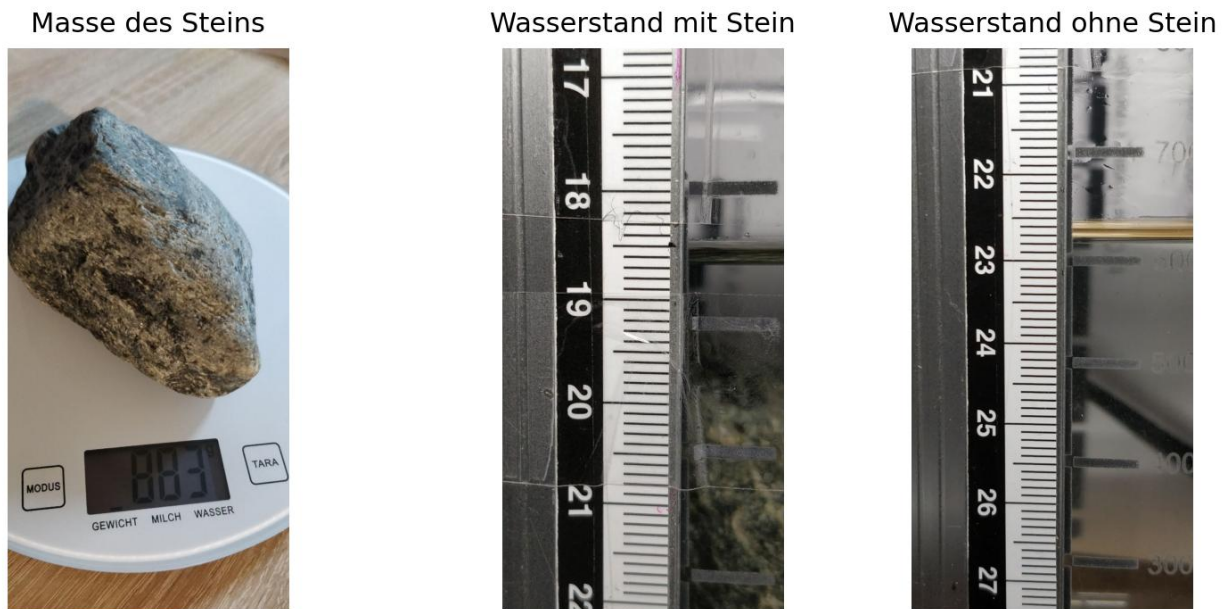


Abbildung 2 Originalaufnahmen der Messung aus der Präsentation. Links die Wägung des Steins mit 883 g, daneben die Wasserstände mit und ohne Stein. Die Zahlen 18,58 cm und 22,64 cm sind interpolierte Ablesewerte der Vorlage, keine neu erhobenen Messwerte.

Berechnung der Probendichte

Für die Masse ist eine Anzeige von 883 g dokumentiert. Zusammen mit dem berechneten Volumen ergibt sich:

$$\rho = \frac{883 \text{ g}}{324,8 \text{ cm}^3} = 2,7186 \dots \text{ g/cm}^3 \quad (6)$$

Die sinnvolle Ergebnisangabe lautet zunächst rund 2,72 g/cm³. Die Ziffernfolge des Taschenrechners ist länger als die durch den Versuch gedeckte Genauigkeit. Insbesondere die aus einem Foto geschätzten Wasserstände besitzen eine Unsicherheit. Ohne Messprotokoll zu Wiederholungen und Kalibrierung wäre eine wesentlich feinere Angabe nicht begründet.

Die Dichte wird im weiteren Modell auf 2.720 kg/m^3 gerundet. Diese bewusste Festlegung ermöglicht eine eindeutige Reproduktion aller späteren Zahlen. Die Herkunft bleibt dabei sichtbar: Es handelt sich um einen gerundeten Messwert einer Gesteinsprobe, der zusätzlich als äußerer Randwert eines vereinfachten Erdmodells verwendet wird.

Eine zweite Volumenmessung mit der Waage

Der Versuch lässt sich durch eine andere Anordnung kontrollieren. Ein Wassergefäß wird auf die Waage gestellt und tariert. Der Stein hängt an einer äußeren Halterung und wird vollständig eingetaucht, ohne Boden oder Gefäßwand zu berühren. Der Stein erfährt Auftrieb. Als Gegenwirkung belastet er das Wasser und damit die Waage zusätzlich. Die angezeigte Massenzunahme entspricht näherungsweise der Masse des verdrängten Wassers.

$$V_{\text{Stein}} = \frac{\Delta m_{\text{Waage}}}{\rho_{\text{Wasser}}} \quad (7)$$

Bei einer Wasserdichte von näherungsweise 1 g/cm^3 entspricht eine Zunahme um 325 g einem Volumen von ungefähr 325 cm^3 . Für höhere Genauigkeit sind die temperaturabhängige Wasserdichte und kleine Auftriebs- und Oberflächeneffekte zu berücksichtigen. Die entscheidende praktische Bedingung lautet, dass die äußere Aufhängung das Steingewicht trägt. Liegt der Stein auf dem Gefäßboden, zeigt die Waage überwiegend seine volle Masse zusätzlich an, und die genannte Auswertung ist unbrauchbar.

Die beiden Verfahren besitzen verschiedene Hauptfehlerquellen. Beim Messgefäß dominiert häufig die Ablesung des Meniskus. Bei der hydrostatischen Wägung sind Berührung, Fadenführung und Stabilität der Anzeige besonders wichtig. Eine Übereinstimmung innerhalb der geschätzten Unsicherheiten stärkt das Vertrauen in den Volumenwert.

4 Wie genau ist die Messung

Ablesegenauigkeit und tatsächliche Genauigkeit

Eine digitale Waage mit einer Anzeige in ganzen Gramm besitzt eine Auflösung von einem Gramm. Daraus folgt noch nicht, dass jede Anzeige höchstens ein Gramm vom tatsächlichen Wert abweicht. Nullpunktfehler, Nichtlinearität und die Lage der Last können weitere Beiträge liefern. Ebenso ist ein interpolierter Skalenwert mit zwei Nachkommastellen nicht automatisch auf einen Hundertstel Zentimeter genau.

Bei einer Volumendifferenz gehen zwei Ablesungen ein. Wenn der erste Wasserstand etwas zu hoch und der zweite etwas zu niedrig gelesen wird, verkleinert sich die Differenz. Umgekehrte Ablesefehler vergrößern sie. Entscheidend ist deshalb die Unsicherheit der Differenz im Verhältnis zum verdrängten Volumen. Ein großer Stein in einem möglichst schmalen, geeigneten Gefäß erzeugt ein günstigeres Verhältnis als ein winziger Stein in einem breiten Eimer.

Ein Foto erlaubt eine nachträgliche Dokumentation, bringt jedoch Perspektive, Bildauflösung und mögliche Verzerrungen ins Spiel. Der Maßstab sollte in derselben Ebene liegen wie die betrachtete Skala. Ein deutlich davor oder dahinter stehender Maßstab kann durch Parallaxe zu einer falschen Umrechnung führen. Für die endgültige Messung ist eine direkte Ablesung unter kontrollierten Bedingungen vorzuziehen.

Ein ausdrücklich angenommenes Fehlerbeispiel

Zur Veranschaulichung sei für die Masse eine Standardunsicherheit von 1 g angenommen. Für jede der beiden Längenablesungen werde beispielhaft eine Standardunsicherheit von 0,05 cm angesetzt. Diese Werte sind keine nachträgliche Feststellung über den tatsächlich durchgeführten Versuch. Sie zeigen, wie ein vollständiges Protokoll ausgewertet werden könnte.

Sind die beiden Ablesefehler unabhängig, beträgt die Standardunsicherheit ihrer Differenz die Wurzel aus der Summe der Quadrate. Bei einer als fehlerfrei angenommenen Kalibrierung ergibt sich:

$$u(\Delta z) = \sqrt{u(z_1)^2 + u(z_2)^2} = 0,071 \text{ cm} \quad (8)$$

$$u(V) = k u(\Delta z) \approx 5,7 \text{ cm}^3 \quad (9)$$

Die relative Unsicherheit des Volumens beträgt damit ungefähr 1,75 Prozent, diejenige der Masse nur etwa 0,11 Prozent. Für unabhängige Eingangsgrößen folgt in linearer Fehlerfortpflanzung:

$$\frac{u(\rho)}{\rho} \approx \sqrt{\left(\frac{u(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{u(V)}{V}\right)^2} \quad (10)$$

Unter diesen angenommenen Bedingungen wäre eine Angabe von etwa $2,72 \pm 0,05 \text{ g/cm}^3$ angemessen, wobei das Plusminus eine Standardunsicherheit und keine garantierte Fehlergrenze bezeichnet. Eine unsichere Kalibrierung des Gefäßes käme zusätzlich hinzu. Werden dieselben Marken zur Kalibrierung und zur Ablesung verwendet, können zudem Korrelationen auftreten. Dann darf die einfache Unabhängigkeitsannahme nicht ungeprüft übernommen werden.

Wiederholen und systematisch prüfen

Mehrere Wiederholungen zeigen, wie stark das Ergebnis unter möglichst gleichen Bedingungen schwankt. Sinnvoll sind vollständige Wiederholungen: Stein herausnehmen, Wasserstand neu ablesen, erneut eintauchen, Luftblasen entfernen und wieder ablesen. Nur mehrfach auf dieselbe unveränderte Skala zu schauen erfasst viele Fehlerquellen nicht.

Ein systematischer Fehler bleibt auch nach vielen Wiederholungen erhalten. Wenn die Gefäßskala falsch ist, liefern hundert sorgfältige Ablesungen einen präzisen, aber verschobenen Mittelwert. Eine unabhängige Kontrollmethode ist deshalb besonders wertvoll. Auch ein Wechsel des Gefäßes oder eine Prüfung mit einem Körper bekannten Volumens kann Hinweise liefern.

Für das Erdmodell kommt eine weitere Unsicherheit hinzu. Selbst eine perfekt gemessene Granitdicke wäre noch keine exakt bekannte mittlere Dichte der gesamten äußeren Erdhülle. Die Streuung der Laborwerte und die Angemessenheit des geologischen Randwerts betreffen unterschiedliche Fragen. Noch einmal davon zu unterscheiden ist die Unsicherheit, die aus der angenommenen linearen Form des Dichteverlaufs entsteht.

5 Größe und Masse der Erde

Der Radius als Maßstab

Ein Radius beschreibt den Abstand vom Mittelpunkt einer Kugel zu ihrer Oberfläche. Die reale Erde ist durch ihre Rotation abgeplattet und besitzt topographische Höhenunterschiede. Für ein radiales

Einstiegsmodell wird ein mittlerer Radius verwendet. Die Hauptrechnungen dieses Buches setzen $R = 6.371 \text{ km}$ und $M = 5,9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ an [2].

Diese Festlegung ist eine Näherung an eine kugelsymmetrische Erde. Sie schafft einen gemeinsamen Maßstab für die Rechnungen. Die örtliche Höhe eines Berggipfels, der Abstand von einer Referenzfläche und der Abstand vom Erdmittelpunkt sind unterschiedliche Größen. In einem idealisierten Kugelmodell können sie einfach miteinander verknüpft werden. Bei genauen geodätischen Messungen muss die tatsächliche Bezugsfläche berücksichtigt werden.

Das Volumen einer Kugel beträgt vier Drittel Pi mal Radius hoch drei. Für die mittlere Dichte ergibt sich daraus:

$$\bar{\rho} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 5513,44 \dots \text{ kg/m}^3 \quad (11)$$

Das Zeichen über ρ kennzeichnet den Mittelwert über das gesamte Erdvolumen. Die Zahl liegt etwa doppelt so hoch wie die gemessene Probendichte. Eine mit 2.720 kg/m^3 homogen gefüllte Erdkugel hätte bei demselben Radius nur rund 49,3 Prozent der angesetzten Erdmasse. Der Vergleich zeigt unabhängig von der später gewählten Dichtefunktion, dass die Probe allein den gesamten Erdkörper nicht repräsentiert.

Wie eine Erdmasse bestimmt wird

Eine Masse muss nicht auf eine Waage gelegt werden, um messbar zu sein. Das Gravitationsgesetz verbindet Masse, Abstand und Beschleunigung. Für das äußere Feld einer kugelsymmetrischen Erde gilt:

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \quad (12)$$

Hier bezeichnet G die Gravitationskonstante. Sie verbindet die durch die Bewegung gemessene Gravitationswirkung mit einer Masse in Kilogramm. Der verwendete Wert ist $G = 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ [3]. Das Produkt GM lässt sich aus Bahndaten besonders gut bestimmen. Die Umrechnung dieses Produkts in eine Masse setzt die unabhängig gemessene Konstante G voraus.

Ist eine Gravitationsbeschleunigung g an einem bekannten Radius R verfügbar, folgt $M = gR^2/G$. Ein Pendel kann g näherungsweise bestimmen. Es misst auf der rotierenden Erde zunächst jedoch die effektive örtliche Schwere. Der Zentrifugalanteil und weitere Korrekturen müssen berücksichtigt werden, bevor der Wert mit dem Feld einer idealisierten ruhenden Kugel gleichgesetzt wird.

Warum die mittlere Dichte kein einfacher Mittelwert ist

Der arithmetische Mittelwert aus einer Oberflächen- und einer Zentraldichte wäre für den Erdkörper im Allgemeinen falsch. Die äußeren Schichten enthalten wesentlich mehr Volumen als gleich dicke Schichten nahe dem Zentrum. Deshalb trägt ein dichter kleiner Zentralbereich weniger zur Gesamtmasse bei als eine ebenso dicke, großflächige äußere Schale.

Eine Kugel mit halbem Erdradius enthält ein Achtel des gesamten Kugelvolumens. Die äußere Hälfte des Radius umfasst die übrigen sieben Achtel. Diese starke Gewichtung der äußeren Bereiche erklärt, warum eine hohe Zentraldichte erforderlich werden kann, obwohl die mittlere Dichte nur mäßig über dem Oberflächenwert liegt.

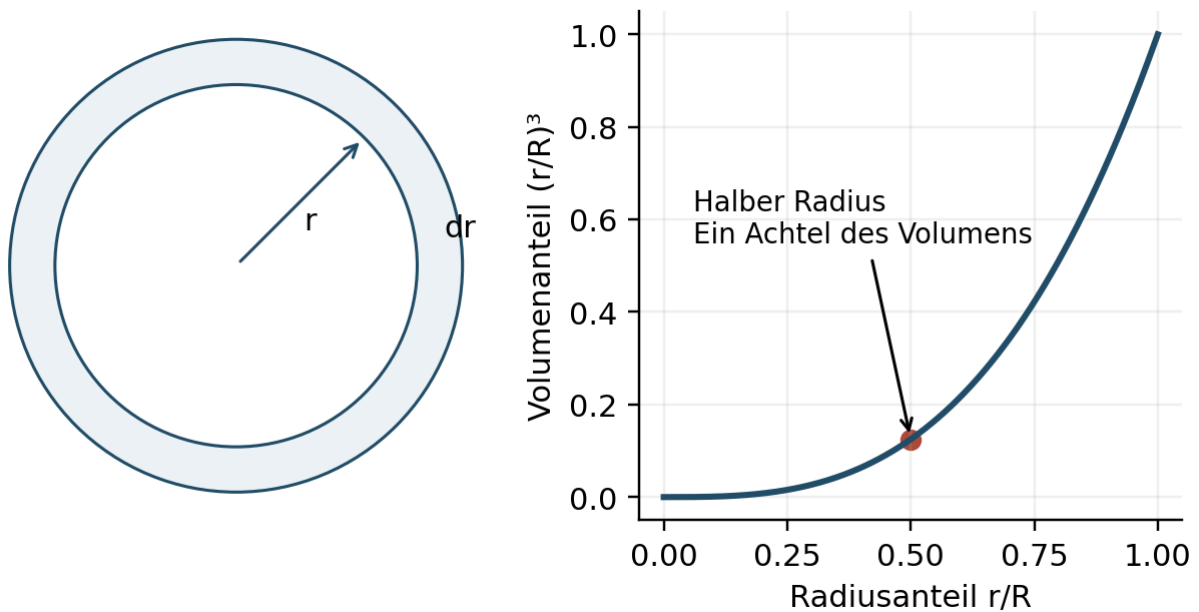


Abbildung 3 Die Kugelschale und die Volumengewichtung. Das Volumen innerhalb eines Radius r wächst mit r^3 . Die äußere Hälfte des Radius enthält sieben Achtel des Gesamtvolumens.

Die Vorstellung dünner Kugelschalen führt unmittelbar zur Integralrechnung. Jede Schale besitzt näherungsweise die Fläche $4\pi r^2$ und die Dicke dr . Ihr Volumen ist damit $4\pi r^2 dr$. Die darin enthaltene Masse ergibt sich durch Multiplikation mit der örtlichen Dichte. Die Gesamtmasse entsteht durch Aufsummieren aller Schalen.

6 Ein lineares Modell der Erddichte

Die Annahmen des Modells

Das Modell beschreibt die Erde als Kugel, deren Dichte allein vom Abstand r zum Mittelpunkt abhängt. Gleiche Radien besitzen damit überall dieselbe Dichte. Kontinente, Gebirge und seitliche Unterschiede bleiben zunächst unberücksichtigt. Zusätzlich wird ein linearer Verlauf angesetzt. Die Dichte nimmt vom Mittelpunkt zur Oberfläche mit einer konstanten Steigung a ab.

$$\rho(r) = \rho_c + ar, \quad 0 \leq r \leq R \quad (13)$$

ρ_c bezeichnet die Zentraldichte. Der Index c steht für das Zentrum. An der Oberfläche gilt $\rho(R) = \rho_s$, wobei $\rho_s = 2.720 \text{ kg/m}^3$ gesetzt wird. Die Größe a besitzt die Einheit kg/m^4 , denn das Produkt ar muss eine Dichte ergeben. Ein negatives a bedeutet, dass die Dichte nach außen abnimmt.

Ein linearer Ansatz wird gewählt, weil er nur zwei Parameter besitzt und sich vollständig durchrechnen lässt. Damit ist noch keine Aussage über die tatsächliche Schichtung bewiesen. Das Modell soll zunächst klären, welche Größenordnung aus dem Zusammenspiel eines niedrigen äußeren Dichtewerts und einer deutlich höheren mittleren Dichte folgt.

Die Masse aus Kugelschalen

Eine dünne Kugelschale im Abstand r hat die Masse $4\pi\rho(r)r^2dr$. Die Integration über den gesamten Radius liefert:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r)r^2 dr \quad (14)$$

Nach Einsetzen der linearen Dichtefunktion wird nur über Potenzen des Radius integriert. Die Stammfunktion zu r^2 ist $r^3/3$, diejenige zu r^3 ist $r^4/4$. Damit folgt:

$$M = 4\pi \left(\frac{\rho_c R^3}{3} + \frac{a R^4}{4} \right) \quad (15)$$

Zusammen mit der Randbedingung $\rho_s = \rho_c + aR$ liegen nun zwei Gleichungen für zwei unbekannte Parameter vor. Die Auflösung wird besonders übersichtlich, wenn die mittlere Dichte eingeführt wird. Division durch das Kugelvolumen ergibt zunächst:

$$\bar{\rho} = \rho_c + \frac{3}{4}aR \quad (16)$$

Wird aR durch $\rho_s - \rho_c$ ersetzt, folgt die Schlüsselbeziehung des Modells:

$$\rho_c = 4\bar{\rho} - 3\rho_s, \quad a = \frac{4(\rho_s - \bar{\rho})}{R} \quad (17)$$

Der Faktor vier vor der mittleren Dichte entsteht aus der räumlichen Gewichtung der Kugelschalen. Er ist keine empirisch angepasste Zahl. Er folgt exakt aus dem linearen Ansatz und der Kugelgeometrie. Die Form des Dichteverlaufs ist daher bereits in der scheinbar einfachen Schlussformel enthalten.

Das Zahlenresultat

Mit den festgelegten Erdgrößen und $\rho_s = 2,720 \text{ g/cm}^3$ liefert die Formel eine Zentraldichte von $13,8938 \text{ g/cm}^3$. Für die Steigung ergibt sich ungefähr $-1,75385 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^4$. Anschaulich nimmt die Dichte pro 1.000 Kilometer Weg nach außen um rund $1,754 \text{ g/cm}^3$ ab.

$$\rho_c \approx 13,89 \text{ g/cm}^3, \quad a \approx -1,754 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m}^4 \quad (18)$$

Die ältere Zahlenwahl der Präsentation führt zu $13,88 \text{ g/cm}^3$. Der kleine Unterschied entsteht überwiegend durch leicht andere Werte für Erdradius und Erdmasse. Er verändert die physikalische Aussage nicht. Für die weiteren Rechnungen werden die im vorigen Kapitel festgelegten Referenzwerte konsequent beibehalten.

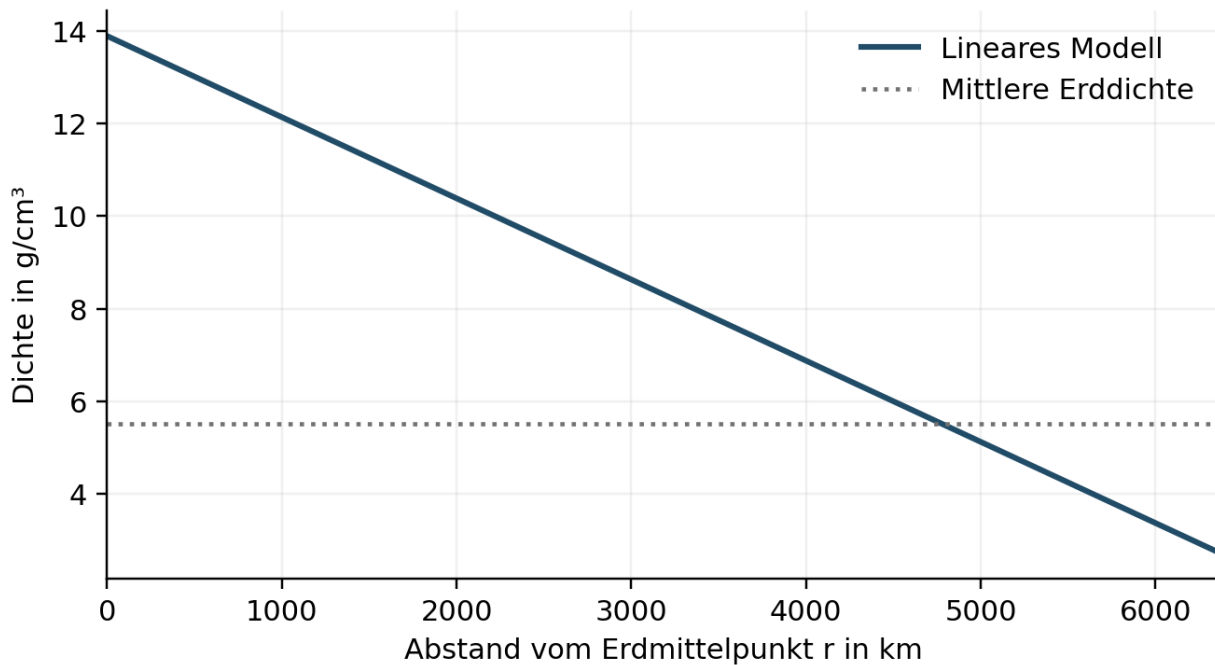


Abbildung 4 Der berechnete lineare Dichteverlauf. Die gestrichelte Linie kennzeichnet die mittlere Erddichte. Der Mittelpunkt liegt links, die Oberfläche rechts. Die Zentraldichte ist ein Modellresultat.

Was die Zahl aussagt

Die Rechnung ergibt die Dichte am Mittelpunkt der modellierten Kugel. Die Bezeichnung Kerndichte ist dafür zu ungenau, weil ein ausgedehnter Kern verschiedene Dichten und einen eigenen Mittelwert besitzt. Im linearen Modell ist zudem keine Grenze zwischen Kern und Mantel eingebaut. Die Gerade enthält weder einen flüssigen äußeren noch einen festen inneren Kern als getrennte Bereiche.

Das Ergebnis zeigt, dass ein relativ einfacher Zusammenhang einen Zentralwert in realistischer Größenordnung liefern kann. Es beweist weder die lineare Form des gesamten Profils noch eine bestimmte chemische Zusammensetzung. Für diese Aussagen sind zusätzliche Beobachtungen erforderlich. Die Nähe eines Einzelwerts zum geophysikalischen Referenzmodell ist eine aussagekräftige Kontrolle, aber keine eindeutige Rekonstruktion des Erdinneren.

Auch mathematisch besitzt der Ansatz eine Besonderheit. Eine räumlich glatte, kugelsymmetrische Dichtefunktion hat im Mittelpunkt eine verschwindende radiale Ableitung. Die Gerade besitzt dort eine von null verschiedene Steigung. Als räumliche Funktion hat sie deshalb eine Spitze am Ursprung. Masse, Gravitationsfeld und Druck bleiben dennoch endlich und berechenbar. Die Form zeigt aber, dass das Modell keine genaue lokale Beschreibung des unmittelbaren Zentralbereichs sein soll.

Empfindlichkeit gegenüber dem äußeren Dichtewert

Bei festgehaltener mittlerer Dichte ändert sich ρ_c um das Dreifache einer Änderung von ρ_s mit umgekehrtem Vorzeichen. Wird der äußere Dichtewert um $0,10 \text{ g/cm}^3$ höher angesetzt, sinkt die berechnete Zentraldichte um $0,30 \text{ g/cm}^3$. Die Masse der Erde bleibt dieselbe. Eine dichtere äußere Region lässt im Modell weniger Masse übrig, die dem inneren Bereich zugeordnet werden muss.

Dieser Zusammenhang ist ein Beispiel dafür, wie sich Annahmen bis in das Resultat fortpflanzen. Die Frage nach der passenden äußeren Dichte ist daher keine Nebensache. Zugleich bleibt die größere

strukturelle Unsicherheit bestehen: Eine andere funktionale Form kann die Masse anders verteilen, auch wenn derselbe äußere Dichtewert verwendet wird.

7 Gravitation im Erdinneren

Die eingeschlossene Masse

An der Erdoberfläche wirkt die Gesamtmasse der Erde. Im Inneren einer kugelsymmetrischen Massenverteilung ist die Situation anders. Für das Gravitationsfeld an einem Radius r trägt nur die innerhalb dieses Radius eingeschlossene Masse zur resultierenden Beschleunigung bei. Die Beiträge einer vollständig umgebenden kugelsymmetrischen Schale heben sich im Inneren auf. Das ist der Newtonsche Kugelschalen- oder Schalentheorem genannte Zusammenhang.

Die Aussage gilt für die resultierende Kraft und setzt Kugelsymmetrie voraus. Sie bedeutet nicht, dass einzelne Massenelemente außerhalb des Radius keine Anziehung ausüben. Ihre vektoriellen Beiträge kompensieren sich. Bei einer unregelmäßigen äußeren Massenverteilung ist diese Kompensation im Allgemeinen unvollständig.

Für das lineare Modell folgt aus derselben Integration wie zuvor, nun mit der oberen Grenze r :

$$m(r) = 4\pi \left(\frac{\rho_c r^3}{3} + \frac{ar^4}{4} \right) \quad (19)$$

Mit $m(0) = 0$ und $m(R) = M$ erfüllt die Formel zwei unmittelbar prüfbare Randbedingungen. Wird in dieser inneren Massenfunktion versehentlich ein R^3 statt eines r^3 eingesetzt, ist die Formel falsch. Der variable Radius muss in beiden Potenztermen stehen.

Feldstärke und Richtung

In diesem Buch bezeichnet $g(r)$ den nichtnegativen Betrag der radialen Gravitationsbeschleunigung. Die Richtung zeigt zum Mittelpunkt. Eine gerichtete radiale Komponente wäre deshalb $-g(r)$, wenn die positive r -Richtung nach außen weist. Diese Konvention verhindert Vorzeichenprobleme in der Druckgleichung und in den Pendelformeln.

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2} = 4\pi G \left(\frac{\rho_c r}{3} + \frac{ar^2}{4} \right) \quad (20)$$

Obwohl die erste Darstellung durch r^2 dividiert, entsteht am Mittelpunkt keine unendliche Beschleunigung. Für kleine Radien wächst die eingeschlossene Masse näherungsweise mit r^3 . Nach der Division bleibt ein Ausdruck proportional zu r . Daher geht $g(r)$ für r gegen null ebenfalls gegen null.

Das Verschwinden der Beschleunigung am Mittelpunkt folgt außerdem aus der Symmetrie. Es gibt dort keine ausgezeichnete Richtung, in die ein kleiner Probekörper insgesamt beschleunigt würde. Die entgegengesetzten Beiträge gleichen sich aus. Hohe Dichte und verschwindende resultierende Beschleunigung widersprechen einander deshalb nicht.

Ein Maximum unter der Oberfläche

Bei einer homogenen Kugel nimmt g vom Mittelpunkt bis zur Oberfläche linear zu. Im linearen Dichtemodell verändert sich dagegen das Verhältnis zwischen zusätzlich eingeschlossener Masse und wachsendem Abstand. Die Ableitung der Feldstärke kann deshalb bereits innerhalb der Erde null werden.

$$\frac{dg}{dr} = 4\pi G \left(\frac{\rho_c}{3} + \frac{ar}{2} \right), \quad r_{\max} = -\frac{2\rho_c}{3a} \quad (21)$$

Für die verwendeten Zahlen liegt dieses Maximum bei etwa 5.281 km Radius, also rund 1.090 km unter der Modelloberfläche. Dort beträgt die Beschleunigung ungefähr 10,26 m/s². An der Oberfläche ergeben sich 9,820 m/s². Diese Werte gehören zum linearen Modell und dürfen nicht als genaue Lage und Höhe des realen Erdmaximums gelesen werden.

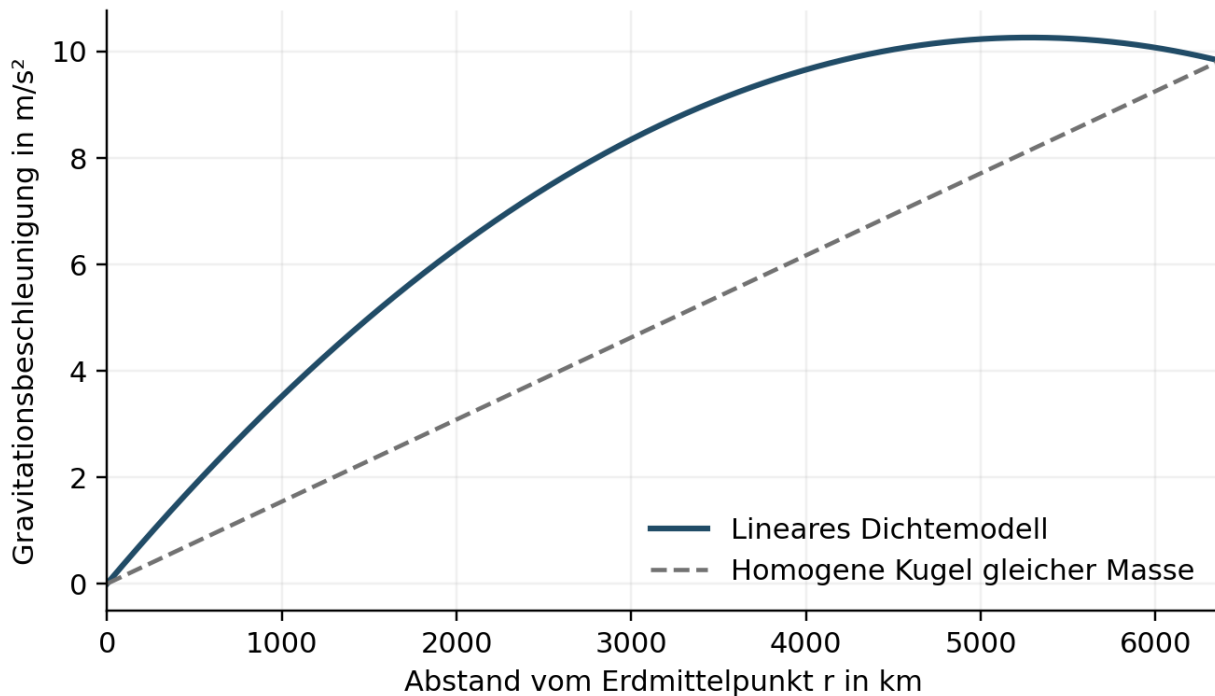


Abbildung 5 Gravitationsbeschleunigung im linearen Modell und in einer homogenen Kugel gleicher Gesamtmasse und gleichen Radius. Beide Kurven haben denselben Oberflächenwert, unterscheiden sich aber im Inneren.

Die gleiche äußere Feldstärke trotz verschiedener innerer Verläufe ist grundlegend. Jede kugelsymmetrische Verteilung mit derselben Gesamtmasse erzeugt außerhalb denselben Verlauf GM/r^2 . Selbst eine ideale, beliebig genaue Messung dieses äußeren Kugelfelds könnte deshalb die radiale Dichteverteilung nicht eindeutig bestimmen. Die mathematische Nicht-Eindeutigkeit besteht unabhängig von der Qualität des Messgeräts.

8 Der Druck bis zum Erdmittelpunkt

Druck trägt das Gewicht der Schichten

Druck ist Kraft pro Fläche. In einer Flüssigkeit kann er beispielsweise eine Wand belasten oder einen eingetauchten Körper von allen Seiten drücken. Seine SI-Einheit ist das Pascal: Ein Pascal entspricht einem

Newton je Quadratmeter. Ein Gigapascal umfasst eine Milliarde Pascal. Die im Erdinneren auftretenden Drücke lassen sich deshalb zweckmäßig in GPa angeben.

Ein tiefer gelegener Bereich trägt die darüberliegende Materie. Für ein kleines radiales Element muss die Differenz der Druckkräfte dessen Gewicht ausgleichen. In einer Kugel mit nach außen wachsender Koordinate r nimmt der Druck nach außen ab. Wird g als positiver Betrag definiert, lautet die hydrostatische Gleichung:

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad (22)$$

Diese Gleichung beschreibt ein lokales Kräftegleichgewicht. Der Ausdruck hydrostatisch wird auch als Näherung für das globale Erdinnere verwendet, obwohl große Teile der Erde fest sind. Der mittlere Druck wird dabei von zusätzlichen gerichteten Spannungen unterschieden. Gebirge, tektonische Spannungen, Rotation und Strömungen erzeugen Abweichungen von einer exakt kugelsymmetrischen hydrostatischen Beschreibung.

Der Ansatz setzt für die Rechnung eine mechanisch annähernd ausgeglichene Kugel voraus. Eine Temperaturverteilung und eine vollständige Materialgleichung werden hier nicht gleichzeitig bestimmt. Die vorgegebene Dichtefunktion und die daraus berechnete Druckverteilung bilden zunächst ein mechanisches Modell. Ob ein konkretes Material unter diesen Bedingungen genau diese Dichte besitzt, wäre eine weitere physikalische Prüfung.

Integration von der Oberfläche nach innen

An der Oberfläche wird $p(R) = 0$ gesetzt. Der atmosphärische Druck liegt nur in der Größenordnung von 10^5 Pa und ist gegenüber Zentraldrücken von mehr als 10^{11} Pa vernachlässigbar. Die Nullsetzung bedeutet daher eine für dieses Problem zweckmäßige Druckreferenz.

$$p(r) = \int_r^R \rho(s)g(s) ds \quad (23)$$

Die Integrationsvariable s bezeichnet jeweils den Radius einer durchlaufenen Schicht. Sie wird vom Endradius r unterschieden, damit die Bedeutung der Grenzen klar bleibt. Das Produkt pg besitzt die Einheit Druckänderung pro Länge. Seine Integration über den Weg von r bis R ergibt den Druckunterschied zur Oberfläche.

Die oft verwendete Näherung $p = \rho gh$ gilt nur dann, wenn Dichte und Schwere über die betrachtete Höhe annähernd konstant sind. Für ein Wassergefäß ist das meist ausreichend. Über Tausende Kilometer im Erdinneren ändern sich beide Größen erheblich. Eine Rechnung mit einer einzigen Dichte und einem konstanten g würde den hier entwickelten Zusammenhang verfehlen.

Die vollständige Formel des linearen Modells

Das Produkt aus Dichte und Feldstärke ist ein Polynom. Es lässt sich daher gliedweise integrieren. Die kompakte Darstellung benutzt eine Hilfsfunktion F , deren Ableitung gleich pg ist:

$$F(r) = \pi G \left(\frac{2\rho_c^2 r^2}{3} + \frac{7a\rho_c r^3}{9} + \frac{a^2 r^4}{4} \right) \quad (24)$$

$$p(r) = F(R) - F(r), \quad p_c = F(R) \quad (25)$$

Der gemischte Term mit a ist negativ, weil die Dichte nach außen abnimmt. Die Summe aller Beiträge ergibt dennoch einen positiven Zentraldruck. Einzelne Terme dürfen nicht getrennt als eigenständige Drücke interpretiert werden. Sie entstehen durch die algebraische Zerlegung desselben positiven Integranden ρg .

Mit den festgelegten Werten folgt ein Zentraldruck von $3,33265 \cdot 10^{11}$ Pa, also rund 333 GPa. Das entspricht ungefähr 3,33 Millionen bar. Die Vorlage nennt $3,325 \cdot 10^{11}$ Pa. Auch hier erklären die geringfügig anderen Ausgangskonstanten den kleinen Zahlenunterschied.

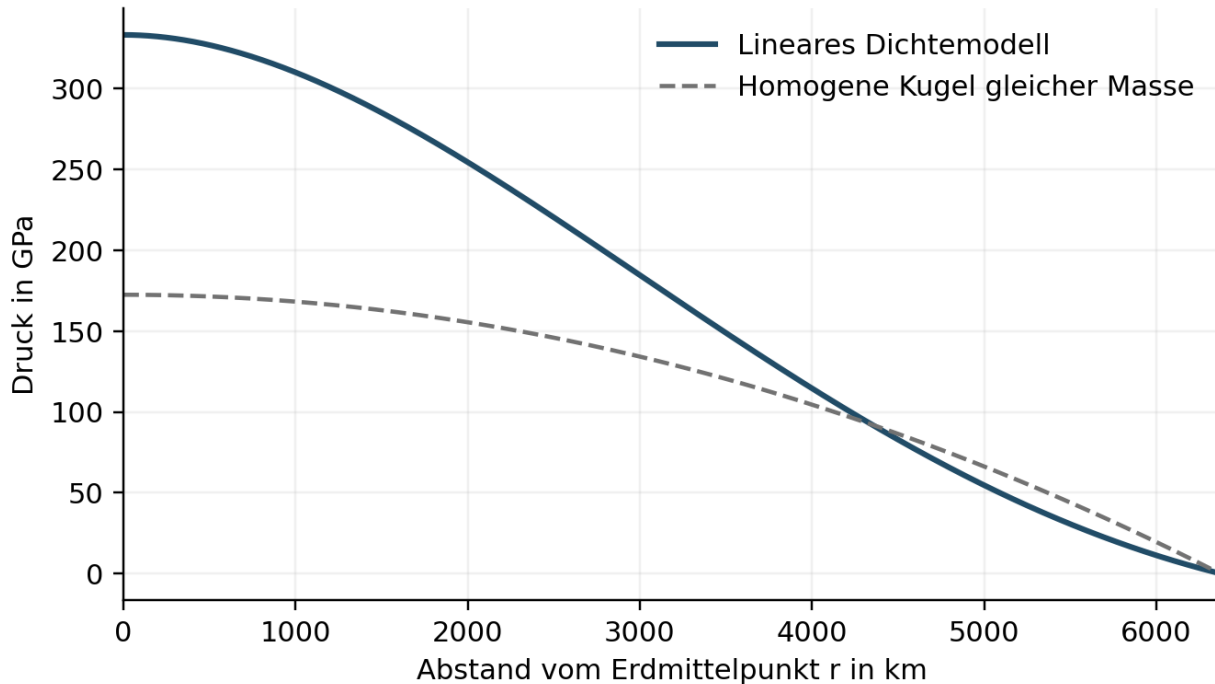


Abbildung 6 Druck im linearen Dichtemodell und in einer homogenen Kugel gleicher Masse und gleichen Radius. Die stärkere Konzentration von Masse im Inneren erhöht den Zentraldruck deutlich.

Druckmaximum bei verschwindender Schwere

Am Mittelpunkt verschwindet die Gravitationsbeschleunigung. Gleichzeitig erreicht der Druck dort seinen höchsten Wert. Der scheinbare Widerspruch verschwindet, wenn Wert und Änderung einer Größe unterschieden werden. Die hydrostatische Gleichung verknüpft g mit der räumlichen Druckänderung. Wo g null ist, verschwindet im kugelsymmetrischen Modell die erste Ableitung des Drucks. Der Druck selbst kann dort sehr groß sein.

Anschaulich drücken die umgebenden Schichten von allen Seiten auf die zentrale Region. Die Kräfte auf einen idealen Punkt heben sich vektoriell auf, während die kompressive Belastung aus allen Richtungen besteht. Ein Körper kann deshalb unter hohem allseitigem Druck stehen, ohne als Ganzes beschleunigt zu werden.

Für kleine r wächst die Feldstärke proportional zu r . Der Druck fällt vom Zentralwert zunächst quadratisch ab. Die Druckkurve besitzt im Zentrum somit eine waagerechte Tangente. Diese Eigenschaft ist ein nützlicher Prüfpunkt für eine berechnete Kurve. Ein spitzer Druckgipfel mit endlicher, von null verschiedener Steigung am Mittelpunkt wäre mit den hier verwendeten Annahmen unvereinbar.

Was sich über Temperatur und Aggregatzustand folgern lässt

Aus dem Druck allein folgt keine eindeutige Temperatur. Auch die Unterscheidung zwischen fest und flüssig erfordert Kenntnisse über die Zusammensetzung und die jeweilige Schmelzkurve. Hoher Druck verändert die Bedingungen, unter denen ein Stoff schmilzt. Deshalb kann ein tieferer Bereich trotz hoher Temperatur fest sein, während ein weiter außen liegender Bereich flüssig ist.

Das mechanische Modell berechnet weder eine Schmelzkurve noch den Wärmehaushalt der Erde. Seine Aussagen betreffen die aus dem Dichteansatz folgende Masse, Gravitation und Druckverteilung. Werden diese Größen später mit Materialdaten und seismischen Befunden kombiniert, entsteht eine umfassendere Beschreibung. Die saubere Abgrenzung verhindert, dass eine zutreffende Druckrechnung mit zusätzlichen, daraus nicht ableitbaren Behauptungen belastet wird.

9 Das Pendel als Messgerät für die Schwere

Eine Bewegung mit messbarer Periode

Ein Pendel verbindet eine Länge mit einer Zeit. Im einfachsten Modell hängt eine kleine, schwere Kugel an einem leichten, praktisch undehnbaren Faden. Nach einer seitlichen Auslenkung wirkt eine Komponente der Gewichtskraft in Richtung der tiefsten Lage. Das Pendel schwingt durch diese Lage hindurch und kehrt nach einer vollständigen Hin- und Herbewegung zum Ausgangszustand zurück.

Die Dauer einer solchen vollständigen Schwingung heißt Periode T . Bei kleinen Auslenkungen lautet die Beziehung zwischen Periode, wirksamer Pendellänge l und örtlicher Schwerebeschleunigung g [8]:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \quad (26)$$

Ein längeres Pendel schwingt langsamer. Eine größere Schwerebeschleunigung verkürzt die Periode. Die Masse des Pendelkörpers fällt aus der idealisierten Gleichung heraus, weil sowohl die rücktreibende Gewichtskraft als auch die Trägheit proportional zur Masse sind. Die Formel bietet damit eine Möglichkeit, die örtliche Schwere über eine Längen- und eine Zeitmessung zu bestimmen.

Die Pendellänge reicht im Punktmassenmodell vom Aufhängepunkt bis zum Schwerpunkt des Pendelkörpers. Wird nur die sichtbare Fadenlänge gemessen und der Radius der Kugel vergessen, entsteht ein systematischer Fehler. Eine schwere Kugel an einem leichten Faden nähert das Modell besser an als eine lange, massive Stange mit beliebig verteilter Masse.

Eine gut durchführbare erste Messung

Ein Pendel von ungefähr einem Meter Länge besitzt nahe der Erdoberfläche eine Periode von etwa zwei Sekunden. Eine einzelne Schwingung mit der Hand zu stoppen ist wenig genau. Besser ist die Messung einer großen Anzahl vollständiger Perioden. Bei N Schwingungen in der Gesamtzeit t gilt $T = t/N$.

Start und Ende werden an derselben Bewegungsphase definiert, beispielsweise beim Durchgang durch die Ruhelage in derselben Richtung. Jeder Durchgang durch die Mitte zählt sonst nur eine halbe Periode. Diese Verwechslung würde bei der anschließenden Berechnung von g einen Faktor vier erzeugen. Ein kurzer Kontrollversuch mit bewusst langsamem Zählen ist deshalb zweckmäßig.

Als reines Rechenbeispiel sei $l = 1,000 \text{ m}$ und eine Zeit von $200,60 \text{ s}$ für 100 vollständige Perioden angenommen. Dann ist $T = 2,0060 \text{ s}$ und $g \approx 9,811 \text{ m/s}^2$. Die Zahlen dienen der Erläuterung einer Auswertung und sind keine zusätzlichen Messdaten des Vortrags.

Mehrere Reihen erlauben einen Vergleich der Ergebnisse. Wenn sich die Periode bei allmählich kleiner werdender Auslenkung systematisch verändert, ist die Amplitudenabhängigkeit bereits sichtbar. Ein festes Stativ, eine ruhige Umgebung und ein klar definiertes Zählverfahren verbessern den Versuch stärker als zusätzliche Nachkommastellen auf dem Taschenrechner.

Die Näherung kleiner Auslenkungen

Die rücktreibende Komponente der Gewichtskraft enthält den Sinus des Auslenkwinkels. Für kleine Winkel kann der Sinus durch den Winkel im Bogenmaß ersetzt werden. Erst diese Näherung führt zur einfachen, amplitudenunabhängigen Formel. Bei endlichem Ausschlag verlängert sich die Periode.

$$T(\theta_0) \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad (27)$$

θ_0 ist die maximale Auslenkung im Bogenmaß. Bei einem Grad ergibt der erste Korrekturterm eine relative Verlängerung von etwa 19 Millionstel, bei fünf Grad bereits rund 476 Millionstel. Für eine grobe Bestimmung von g fällt der erste Effekt kaum ins Gewicht. Für einen Höhenvergleich über 1.000 Meter ist die relative Änderung der Periode selbst nur etwa 157 Millionstel groß. Ein unkontrollierter Ausschlag von mehreren Grad kann den gesuchten Effekt somit überdecken.

Die beiden Messstationen müssen daher möglichst gleiche kleine Amplituden verwenden, oder die gemessenen Perioden müssen auf dieselbe Amplitude korrigiert werden. Eine frei ausklingende Schwingung verlangt außerdem eine dokumentierte Zuordnung von Ausschlag und Zeitpunkt. Der Ausdruck kleine Auslenkung bezeichnet keine universelle Genauigkeitsgarantie, sondern eine Näherung, deren Eignung vom Messziel abhängt.

Reale Pendel und Pendeluhr

Eine historische Pendeluhr enthält eine Hemmung, die dem Pendel regelmäßig Energie zuführt und zugleich das Räderwerk steuert. Reibung, Antrieb und Hemmung können den Gang beeinflussen. Die Uhrzeit auf dem Zifferblatt ist daher nicht unter allen Bedingungen ein unmittelbarer Ersatz für eine präzise Bestimmung der freien Pendelperiode.

Für einen ausgedehnten starren Pendelkörper gelten bei kleinen Auslenkungen die folgenden Beziehungen für Periode und wirksame Länge:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{mgd}}, \quad l_{\text{eff}} = \frac{I_A}{md} \quad (28)$$

Dabei bezeichnet I_A das Trägheitsmoment um die Aufhängung und d den Abstand des Schwerpunkts von ihr. Bei einem Ortsvergleich mit demselben unveränderten Pendel kann der Längenfaktor im Periodenverhältnis herausfallen. Für die absolute Bestimmung von g oder M muss er dagegen bekannt sein.

Ein modernes Zeitmessverfahren kann die Nulldurchgänge optisch oder elektronisch erfassen. Auch dabei sind Zeitbasis, Abtastrate und Auswertung zu prüfen. Die hohe zeitliche Auflösung eines Geräts garantiert

noch keine entsprechend genaue absolute Zeitmessung. Die entscheidende Größe ist eine über die gesamte Messdauer stabile und bekannte Zeitbasis.

10 Den Erdradius aus einem Höhenvergleich bestimmen

Der ideale Versuch an zwei Stationen

Außerhalb einer kugelsymmetrischen, nicht rotierenden Erde nimmt die Gravitationsbeschleunigung mit dem Quadrat des Abstandes ab. Wird dasselbe Pendel vom Radius R zum Radius $R + h$ gebracht, bleibt seine wirksame Länge gleich, während g kleiner wird. Seine Periode wächst.

Gleiche wirksame Pendellänge an beiden Stationen

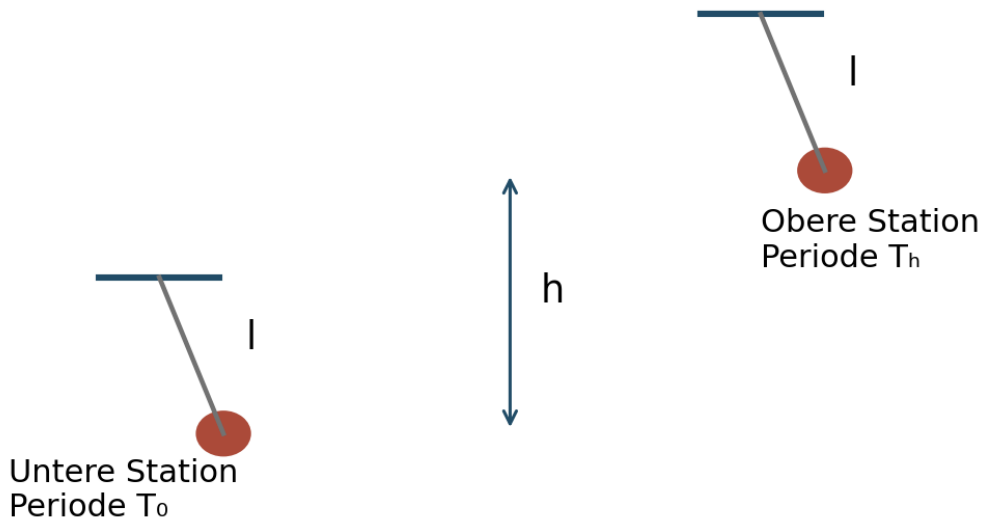


Abbildung 7 Prinzip des Höhenvergleichs. Die untere Station liegt im Modell bei R , die obere bei $R + h$. Für den Vergleich muss die wirksame Pendellänge unverändert bleiben.

Die untere Periode heiße T_0 , die obere T_h . Aus der Pendelformel und dem Gravitationsgesetz folgt unmittelbar:

$$T_0 = 2\pi R \sqrt{\frac{l}{GM}}, \quad T_h = 2\pi(R + h) \sqrt{\frac{l}{GM}} \quad (29)$$

Die Periodendifferenz wird eindeutig als $\Delta T = T_h - T_0$ definiert. Sie ist für $h > 0$ positiv. Die obere Pendeluhr schwingt langsamer. Aus den beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{T_h}{T_0} = 1 + \frac{h}{R}, \quad \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{h}{R} \quad (30)$$

Damit erhält der Erdradius eine bemerkenswert einfache Darstellung:

$$R = h \frac{T_0}{\Delta T} \quad (31)$$

Innerhalb des beschriebenen idealen Modells ist die Beziehung exakt. Für sie muss h nicht erst gegenüber R vernachlässigt werden. Ihre Genauigkeit in einem realen Experiment wird durch die Gültigkeit der Modellannahmen begrenzt. Außerdem bezeichnet R zunächst den geozentrischen Radius der unteren Messstation. Liegt diese auf einem Berg oder über einer gewählten Referenzfläche, ist ihr Radius vom mittleren Referenzradius zu unterscheiden.

Auch die Erdmasse wird zugänglich

Die Differenz der Perioden enthält den Faktor $\sqrt{l/(GM)}$. Auflösen nach der Masse ergibt:

$$M = \frac{l}{G} \left(\frac{2\pi h}{\Delta T} \right)^2 \quad (32)$$

Die Formel zeigt genau, welche Größen erforderlich sind: die wirksame Pendellänge, der Höhenunterschied, die Periodendifferenz und die Gravitationskonstante. Für den Radius genügt bei unverändertem Pendel das Periodenverhältnis. Für die Masse muss zusätzlich eine absolute Längenskala des Pendels bekannt sein.

Damit verbindet sich der Pendelversuch mit der Steinmessung. Radius und Masse liefern die mittlere Erddichte. Die gemessene Gesteinsdichte bildet den äußeren Randwert. Unter der linearen Annahme folgen daraus Zentralkichte, inneres Gravitationsfeld und Druck. Der vollständige Zusammenhang ist geschlossen, sobald alle nötigen Eingangsgrößen gemessen oder unabhängig bekannt sind.

Wie klein ist der Effekt

Bei $R = 6.371$ km und $h = 1.000$ m beträgt die relative Periodenänderung etwa 0,00015696. Das entspricht 0,0157 Prozent. Für ein ein Meter langes Pendel ergibt sich im gewählten Kugelfeld $T_0 \approx 2,0051$ s. Die obere Periode ist lediglich ungefähr 0,0003147 s länger, also um etwa 0,315 Millisekunden.

Eine einmalige Messung von zwei einzelnen Schwingungen kann einen solchen Unterschied mit einer Handstoppuhr nicht verlässlich auflösen. Der Effekt lässt sich jedoch über viele Perioden ansammeln. Ein sehr kleiner Unterschied je Schwingung führt über genügend lange Zeit zu einer deutlich sichtbaren Gangabweichung.

Höhe h in m	ΔT je Periode in ms	Änderung von g in m/s^2	Dauer für 1 s Nachgang
10	0,0031	-0,00003083	176 h 58 min 21 s
100	0,0315	-0,00030827	17 h 41 min 51 s
1.000	0,3147	-0,00308209	1 h 46 min 12 s
3.000	0,9441	-0,00924191	0 h 35 min 25 s

Die Zahlen der Tabelle beschreiben das reine Kugelfeld und eine unveränderte Pendellänge von einem Meter. Reale Höhendifferenzen auf Gebirgen enthalten zusätzliche Gravitationsanteile. Die Tabelle gibt daher zunächst die Zielgröße eines idealisierten Versuchs an, an der sich die Anforderungen an die Messung beurteilen lassen.

Periodendifferenz und Nachgang einer Uhr

Die Periodendifferenz ΔT ist eine Zeit pro Schwingung. Der Nachgang einer Uhr ist dagegen eine angesammelte Zeitdifferenz nach vielen Schwingungen. Werden beide Größen verwechselt, entstehen falsche Beobachtungsdauern.

Eine Uhr sei an der unteren Station so eingestellt, dass jede vollständige Pendelperiode als T_0 Sekunden gezählt wird. An der oberen Station dauert dieselbe Periode tatsächlich T_h Sekunden. Nach einer real verstrichenen Zeit t zeigt die Uhr daher tT_0/T_h an. Ihr Nachgang L ist:

$$L = t \left(1 - \frac{T_0}{T_h} \right) = t \frac{h}{R + h} \quad (33)$$

Die Zeit bis zu einer Sekunde Nachgang lautet folglich:

$$t_{1s} = \frac{R + h}{h} \cdot 1 \text{ s} \quad (34)$$

Bei 1.000 Metern Höhenunterschied sind das 6.372 Sekunden, also 1 Stunde 46 Minuten 12 Sekunden. Bei 3.000 Metern sind es rund 35 Minuten 25 Sekunden. Diese Ergebnisse sind im idealen Modell unabhängig von der Pendellänge. Ein kürzeres Pendel besitzt zwar eine kleinere absolute Periodendifferenz, schwingt aber entsprechend häufiger.

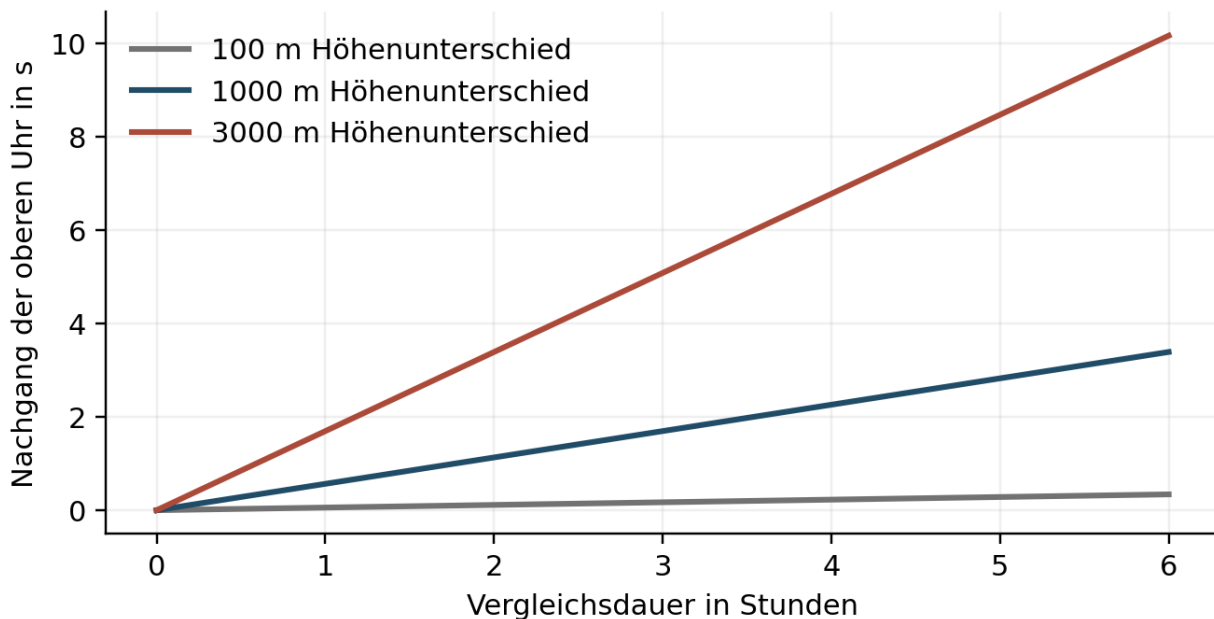


Abbildung 8 Ansammlung des Nachgangs im idealen Kugelfeld. Die obere Uhr sei auf den Gang an der unteren Station eingestellt. Für 1.000 m Höhenunterschied entstehen etwa 13,56 Sekunden Nachgang pro Tag.

Die Abweichung einer realen Uhr kann zusätzlich durch Temperatur und Mechanik entstehen. Eine beobachtete Sekunde Gangunterschied ist deshalb noch kein Nachweis, dass genau eine Sekunde auf den Höheneffekt entfällt. Die experimentelle Aufgabe besteht darin, den gewünschten Anteil von den anderen Beiträgen zu trennen.

11 Was einen realen Pendelvergleich schwierig macht

Die Länge muss konstant bleiben

Die Pendelperiode hängt von der Wurzel der Länge ab. Eine kleine relative Längenänderung erzeugt näherungsweise die halbe relative Periodenänderung. Zusammen mit einer kleinen Änderung von g ergibt sich:

$$\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{2} \frac{\delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\delta g}{g} \quad (35)$$

Eine relative Längenänderung von 0,000314 würde denselben Periodeneffekt erzeugen wie ein idealer Höhenunterschied von 1.000 Metern. Bei einem Meter Pendellänge entspricht dies nur 0,314 Millimetern. Fadenkriechen, eine verschobene Aufhängung oder eine unbemerkte Änderung am Pendelkörper können daher entscheidend sein.

Zur Veranschaulichung sei ein effektiver Wärmeausdehnungskoeffizient von $12 \cdot 10^{-6}$ pro Kelvin angenommen. Dann ändert sich die Periode bei einer Temperaturänderung um ein Kelvin ungefähr um sechs Millionstel. Bei fünf Kelvin Unterschied wären es etwa dreißig Millionstel, also schon rund ein Fünftel des idealen Signals für 1.000 Meter Höhe. Der angenommene Koeffizient ist ein Rechenbeispiel; für einen konkreten Aufbau muss der tatsächliche Wert der wirksamen Pendellänge bestimmt werden.

Eine Temperaturmessung neben dem Pendel genügt nicht immer. Der gesamte Pendelkörper und die Aufhängung müssen ein annähernd stationäres thermisches Gleichgewicht erreicht haben. Nach einem Transport kann dies Zeit benötigen. Ein kontrollierter Raum, eine ausreichend lange Anpassung und wiederholte Rückmessungen sind deshalb wesentliche Bestandteile des Versuchs.

Luft und Mechanik

Der Auftrieb der Luft verkleinert die resultierende rücktreibende Gewichtskraft. Ihre Dichte ändert sich mit Druck und Temperatur. Luftwiderstand dämpft die Schwingung und beeinflusst über die Amplitude auch die gemessene Periode. Der Effekt hängt von Form und Dichte des Pendelkörpers ab. Ein kompakter, dichter Körper ist für einen präzisen Vergleich günstiger als ein großer, leichter Hohlkörper.

Bei einer Pendeluhr kommen die Hemmung und der Antrieb hinzu. Schon eine veränderte Aufstellung kann den Bewegungsablauf verändern. Das Gerät sollte daher zunächst an einem Ort über die geplante Messdauer charakterisiert werden. Wenn sein Gang dort stärker schwankt als das erwartete Höhensignal, liefert ein Ortswechsel keine eindeutig auswertbare Bestimmung des Erdradius.

Zwei äußerlich gleiche Uhren sind ebenfalls nicht automatisch identische Messgeräte. Ihre wirksamen Längen, ihre Amplituden und ihr Gang können verschieden sein. Für einen einfachen Vergleich ist die nacheinander erfolgende Messung mit demselben Pendel oft besser nachvollziehbar. Bei zwei Geräten sind gemeinsame Kalibrierung und ein Tausch zwischen den Stationen erforderlich, um Geräteunterschiede von Ortsunterschieden zu trennen.

Der Berg zieht selbst an

Eine obere Station auf einem Berg besitzt nicht nur einen größeren Abstand zum Erdmittelpunkt. Unter und neben ihr liegt zusätzliche Gesteinsmasse. Diese Masse trägt zur örtlichen Schwere bei. Der reine Abstandseffekt wird deshalb durch die Anziehung des Geländes überlagert. In der Gravimetrie werden Höhen-, Gelände- und weitere Korrekturen getrennt behandelt [7].

Eine stark vereinfachte Abschätzung ersetzt die zusätzliche Gesteinsmasse durch eine ausgedehnte ebene Platte der Dicke h und Dichte ρ . Ihr Gravitationsbeitrag beträgt:

$$\Delta g_{\text{Platte}} = 2\pi G \rho h \quad (36)$$

Für $\rho = 2.670 \text{ kg/m}^3$ und $h = 1.000 \text{ m}$ ergibt sich rund $0,00112 \text{ m/s}^2$. Der reine Höhenverlust des Kugelfelds beträgt bei 1.000 Metern ungefähr $0,00308 \text{ m/s}^2$. Das Plattenbeispiel erreicht damit mehr als ein Drittel dieser Zielgröße. Der tatsächliche Berg besitzt eine andere Geometrie, doch schon die Abschätzung zeigt, dass seine Anziehung keinesfalls automatisch vernachlässigbar ist.

Wenn der zusätzliche Bergbeitrag die Abnahme von g verringert, fällt auch die Verlängerung der Pendelperiode kleiner aus. Wird dann dennoch die reine Kugelformel $R = hT_0/\Delta T$ eingesetzt, ergibt sich ein zu großer scheinbarer Radius. Das Vorzeichen dieser Verfälschung lässt sich ohne Detailrechnung verstehen. Ihre genaue Größe verlangt ein Geländemodell und eine entsprechende Dichteannahme.

Geographische Breite und Erdrotation

Die örtliche Schwere hängt auch von der geographischen Breite ab. Die Erdrotation erzeugt einen Zentrifugalanteil, und die Erde ist abgeplattet. Zwei Stationen mit unterschiedlicher Breite unterscheiden sich deshalb schon auf vergleichbarer Höhe. Ein Vergleich zwischen einem tiefer gelegenen Ort und einem entfernten Berggipfel enthält gleichzeitig einen Höhen- und einen Breitenwechsel.

Das Ausgangsbeispiel mit einem Ort im Tiefland und dem Brocken verdeutlicht den Gedanken des Höhenvergleichs. Für eine quantitative Messung müssten die wirklichen Stationskoordinaten und Höhen benutzt werden. Die nominelle Gipfelhöhe eines Berges ist nicht automatisch der Höhenunterschied zwischen den beiden Pendelaufhängungen. Auch Gebäudehöhe und Lage des Messraums gehören zur Geometrie.

Zusätzlich wirken zeitabhängige Beiträge, unter anderem die Gezeitenwirkung von Mond und Sonne sowie Änderungen der Massenverteilung in Atmosphäre und Wasser. Für den einfachen Nachweis eines großen Höhengsignals sind einige dieser Beiträge klein. Für eine genaue Bestimmung des Radius oder eine aussagekräftige Fehlerbilanz müssen sie entsprechend dem angestrebten Genauigkeitsniveau geprüft werden.

Nachweis und genaue Bestimmung

Ein Experiment kann eine Änderung erkennen, ohne daraus schon eine genaue globale Größe bestimmen zu können. Für den Nachweis genügt, dass das Signal wiederholbar über der Streuung liegt und sich passende Kontrollbedingungen herstellen lassen. Für einen verlässlichen Erdradius müssen zusätzlich die systematischen Beiträge ausreichend bekannt sein.

Wird bei 1.000 Metern Höhendifferenz eine Radiusgenauigkeit von einem Prozent angestrebt, muss die relative Periodenänderung von rund 157 Millionstel auf etwa 1,6 Millionstel bestimmt werden. Bei einer Periode von ungefähr zwei Sekunden entspricht dies einer Unsicherheit der Differenz von nur rund drei Mikrosekunden. Eine lange Beobachtungsdauer kann zufällige Zeitfehler verringern. Ein unbekannter Temperatur- oder Geländeeffekt verschwindet dadurch nicht.

Die sachliche Schlussfolgerung lautet deshalb: Der Pendelgedanke ist physikalisch tragfähig und didaktisch ergiebig. Eine genaue Vermessung der Erde mit einer beliebigen Haushaltsuhr ist dagegen kein einfacher Selbstläufer. Der Steinversuch und der Präzisionsvergleich eines Pendels gehören unterschiedlichen experimentellen Anspruchsstufen an.

12 Der Vergleich mit dem gegliederten Erdaufbau

Was zusätzliche Beobachtungen beitragen

Die Erde besitzt eine Kruste, einen Mantel sowie einen äußeren und einen inneren Kern. Die Kenntnis dieser Gliederung stützt sich auf verschiedene Beobachtungen, besonders auf die Ausbreitung seismischer Wellen. Laufzeiten, Reflexionen und Brechungen liefern Informationen über Änderungen der elastischen Eigenschaften und über Grenzflächen im Inneren [4, 6].

Kompressionswellen verändern das Volumen eines Mediums während ihrer Ausbreitung. Scherwellen verformen es ohne dieselbe Art periodischer Volumenänderung. Flüssigkeiten besitzen im üblichen seismischen Frequenzbereich keine statische Scherfestigkeit und tragen deshalb keine entsprechenden Scherwellen wie ein elastischer Festkörper. Dieses unterschiedliche Verhalten trägt zur Schlussfolgerung eines flüssigen äußeren Kerns bei.

Für den festen inneren Kern werden weitere seismische Phasen und das Verhalten der Erde als schwingender Körper ausgewertet. Die Materialzuordnung stützt sich zusätzlich auf Laboruntersuchungen und die physikalische Plausibilität von Zusammensetzungen unter hohem Druck. Die Dichte allein würde die gesamte Schlussfolgerung nicht tragen [6].

Das Referenzmodell PREM

Das Preliminary Reference Earth Model, abgekürzt PREM, wurde von Adam M. Dziewonski und Don L. Anderson 1981 veröffentlicht. Es beschreibt mittlere radiale Eigenschaften der Erde und verbindet mehrere Arten geophysikalischer Daten. Dazu gehören seismische Beobachtungen, Eigenschwingungen, Gesamtmasse und Trägheitsmoment [4].

Für den hier betrachteten Vergleich werden die veröffentlichten stückweisen Dichtefunktionen verwendet. Die in einer neueren Fachpublikation wiedergegebenen PREM-Koeffizienten erlauben eine unabhängige numerische Berechnung des Gravitations- und Druckverlaufs [5]. PREM selbst ist ein Referenzmodell. Seine radialen Mittelwerte sollen weder jedes lokale Gestein noch jede seitliche Struktur erfassen.

Die im Modell verwendete Grenze des inneren Kerns liegt bei 1.221,5 km Radius, die Grenze zwischen Kern und Mantel bei 3.480 km. Der Mittelradius beträgt 6.371 km. Im Gegensatz zum linearen Modell treten deutliche Dichtesprünge auf. Sie tragen Information über die Gliederung, die in einer einzigen Geraden grundsätzlich fehlt.

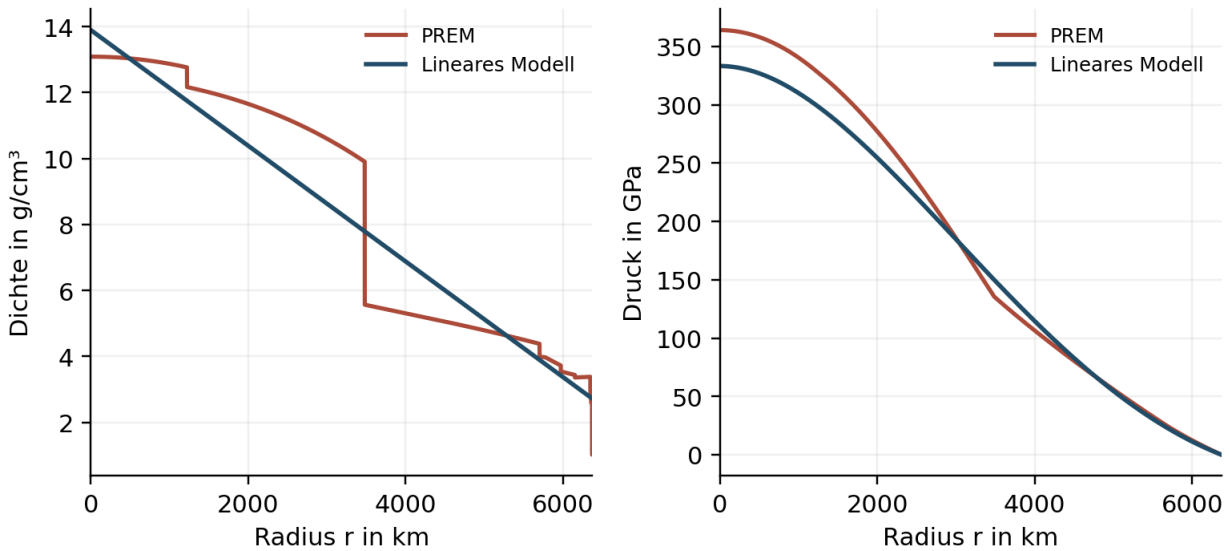


Abbildung 9 Vergleich des linearen Modells mit PREM. Links die Dichteprofile, rechts die daraus hydrostatisch berechneten Drücke. Die PREM-Rechnung verwendet die stückweisen Dichtefunktionen aus [5] und G aus [3].

Nähe der Zentralwerte und Unterschiede im Inneren

Im PREM-Dichteansatz beträgt die Zentraldichte $13,0885 \text{ g/cm}^3$. Das lineare Modell liegt mit $13,8938 \text{ g/cm}^3$ um etwa 6,2 Prozent darüber. Der Wert von rund $13,1 \text{ g/cm}^3$ bezeichnet in diesem Vergleich die Dichte nahe dem Zentrum. Er darf nicht ohne Weiteres als mittlere Dichte des gesamten inneren Kerns verwendet werden.

Die Integration der PREM-Dichtefunktionen liefert mit der hier verwendeten Gravitationskonstante einen Zentraldruck von ungefähr $364,1 \text{ GPa}$. Das lineare Modell liegt mit $333,3 \text{ GPa}$ rund 8,5 Prozent darunter. Für eine Rechnung mit einem einzigen linearen Dichteansatz ist das eine brauchbare Größenordnung. Für eine präzise Beschreibung der Erde ist die Abweichung erheblich.

Die Nähe der beiden Zentralwerte verdeckt größere lokale Unterschiede. An der Grenze zwischen Mantel und Kern enthält PREM einen Dichtesprung. Die lineare Kurve verläuft dort stetig durch einen Zwischenwert. Sie ordnet die Massenanteile bestimmten Radien anders zu. Daher weichen auch das innere Gravitationsfeld und einzelne Druckwerte voneinander ab.

Die Druckkurven wirken im Vergleich glatter als die Dichtekurven. Das folgt aus der Integration. Ein Dichtesprung erzeugt bei endlicher Feldstärke einen Sprung der Druckableitung, während der Druck selbst stetig bleibt. Die Integration glättet also sichtbare Einzelheiten. Eine ähnlich aussehende Druckkurve beweist deshalb noch keine ähnlich genaue Dichteverteilung.

Eine unabhängige Kontrolle mit dem Trägheitsmoment

Das Trägheitsmoment beschreibt, wie stark sich eine Massenverteilung einer Änderung ihrer Rotation widersetzt. Masse weit von einer Drehachse trägt stärker dazu bei als gleich große Masse nahe der Achse. Für eine kugelsymmetrische Dichteverteilung ergibt sich um eine Achse durch den Mittelpunkt:

$$I = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho(r) r^4 dr \quad (37)$$

Im Unterschied zur Gesamtmasse, deren Integral den Faktor r^2 enthält, gewichtet das Trägheitsmoment die äußeren Bereiche mit r^4 . Es liefert daher eine zusätzliche Information über die räumliche Verteilung der Masse. Der dimensionslose Quotient $I/(MR^2)$ ist besonders gut für Vergleiche geeignet.

Für eine homogene Kugel beträgt dieser Quotient 0,4. Für das lineare Modell ergibt die analytische Integration etwa 0,33245. Der in der NASA-Zusammenstellung genannte Erdwert liegt bei rund 0,3308 [2]. Das lineare Modell trifft somit auch diese zusätzliche globale Kennzahl relativ gut, mit einer Abweichung von etwa einem halben Prozent.

Der Vergleich ist aussagekräftiger als eine erneute Kontrolle der Gesamtmasse, denn die Masse wurde bereits zur Festlegung des Modells benutzt. Das Trägheitsmoment dagegen ging in die Bestimmung der beiden linearen Parameter nicht ein. Seine Nähe zum Erdwert ist ein zusätzlicher Erfolg des Ansatzes. Sie hebt die sichtbaren Unterschiede im lokalen Dichteprofil jedoch nicht auf.

13 Wie eindeutig ist der Schluss auf das Erdinnere

Eine Modellfamilie mit denselben Ausgangsdaten

Die Nicht-Eindeutigkeit lässt sich unmittelbar vorführen. Dazu wird die lineare Funktion durch eine Familie von Potenzansätzen ersetzt. Alle besitzen denselben Oberflächenwert und werden so angepasst, dass dieselbe Gesamtmasse entsteht:

$$\rho_n(r) = \rho_{c,n} - (\rho_{c,n} - \rho_s) \left(\frac{r}{R} \right)^n, \quad n > 0 \quad (38)$$

Die Integration über das Kugelvolumen liefert:

$$\rho_{c,n} = \rho_s + \frac{n+3}{n} (\bar{\rho} - \rho_s) \quad (39)$$

Für $n = 1$ entsteht das lineare Modell. Für $n = 2$ ist die Funktion im Zentrum glatter und besitzt eine waagerechte Tangente. Für $n = 4$ bleibt der zentrale Bereich über einen größeren Radius vergleichsweise gleichförmig, während der Abfall stärker auf die äußeren Bereiche konzentriert ist.

Potenz n	Zentraldichte in g/cm ³	Trägheitsfaktor $I/(MR^2)$
1	13,89	0,33245
2	9,70	0,34210
4	7,61	0,35496

Alle drei Beispiele erfüllen dieselbe Massenbedingung und denselben äußeren Dichtewert. Dennoch reichen die berechneten Zentraldichten von rund 7,61 bis 13,89 g/cm³. Diese Differenz kann durch eine noch genauere Wägung desselben Steins nicht beseitigt werden. Sie entsteht aus der Wahl der Modellform.

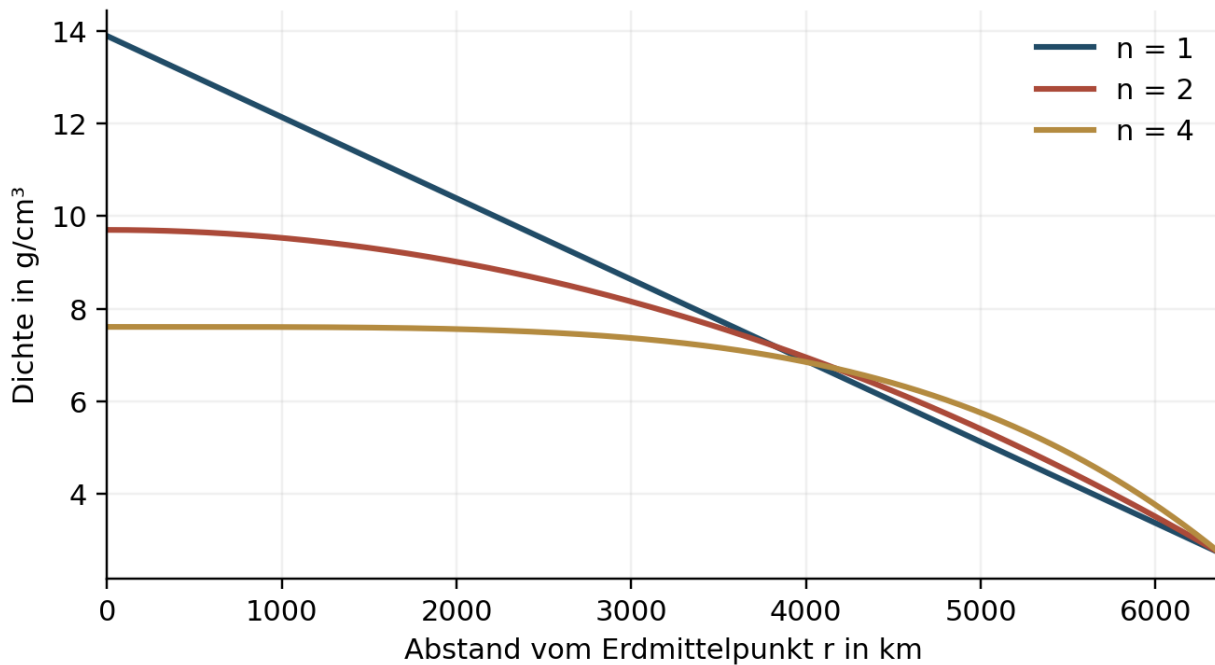


Abbildung 10 Drei verschiedene Dichteprofile mit gleicher Gesamtmasse, gleichem Radius und gleicher äußerer Dichte. Der lineare Ansatz entspricht $n = 1$. Die übrigen Kurven zeigen die strukturelle Nicht-Eindeutigkeit.

Die Beispiele sind mathematische Gegenmodelle. Sie beanspruchen keine gleichermaßen gute geophysikalische Beschreibung. Gerade die zusätzlichen Beobachtungen, insbesondere Seismik und Trägheitsmoment, unterscheiden ihre Eignung. So wird sichtbar, welche Information eine bestimmte Messgröße beiträgt und welche Fragen sie offenlässt.

Eingebaute Übereinstimmung und echte Prüfung

Ein Modell, dessen Parameter aus der Erdmasse bestimmt wurden, muss diese Masse anschließend wiedergeben. Das ist eine notwendige Rechenkontrolle. Es wäre jedoch ein Zirkelschluss, die erzwungene Übereinstimmung als unabhängigen Beweis für den gesamten Dichteverlauf zu verwenden.

Eine aussagekräftige Prüfung verwendet Beobachtungen, die nicht bereits zur Anpassung dienten. Das Trägheitsmoment ist hierfür im vorliegenden Ansatz geeignet. Auch die Lage seismisch bestimmter Grenzflächen liefert zusätzliche Bedingungen. Widerspricht ein Modell solchen unabhängigen Befunden, muss seine Reichweite eingeschränkt oder seine Form erweitert werden.

Mehr Parameter erlauben eine genauere Anpassung, schaffen aber auch mehr Möglichkeiten. Ein Modell mit vielen freien Schichten kann zahlreiche Messwerte reproduzieren und trotzdem in schlecht beobachteten Bereichen unsicher bleiben. Die Anzahl der Nachkommastellen eines Parameters sagt wenig darüber aus, wie eindeutig er durch die Daten festgelegt ist.

Messunsicherheit und Modellunsicherheit

Messunsicherheit betrifft beispielsweise den Volumenwert der Probe oder die gemessene Pendelperiode. Sie kann oft durch Wiederholungen, bessere Geräte und sorgfältige Kalibrierung verringert werden. Modellunsicherheit betrifft dagegen die Gültigkeit von Kugelsymmetrie, linearer Dichteverteilung oder hydrostatischer Näherung.

Beide Unsicherheiten beeinflussen die Ergebnisse, aber auf verschiedene Weise. Eine enge Streuung der Probendichte kann zu einer engen statistischen Streuung der linearen Zentralsdichte führen. Sie rechtfertigt keine ebenso enge Aussage über die tatsächliche Zentralsdichte der Erde, solange andere zulässige Modellformen deutlich verschiedene Werte ergeben.

Diese Unterscheidung führt zu einer sinnvollen Formulierung des Ergebnisses: Mit dem dokumentierten Gesteinswert und den festgelegten Erdgrößen liefert das lineare Kugelmodell ungefähr $13,9 \text{ g/cm}^3$ und 333 GPa im Zentrum. Der Vergleich mit weiteren Beobachtungen zeigt, dass das Modell globale Größenordnungen gut trifft, die tatsächliche Schichtung aber nicht rekonstruiert.

Eine allgemeinere Einsicht

Die Physik gewinnt Wissen über unzugängliche Bereiche, indem sie messbare Wirkungen mit überprüfbaren Gesetzmäßigkeiten verbindet. Die Stärke dieses Verfahrens liegt in der Offenlegung der Abhängigkeiten. Jede Zusatzannahme kann verändert werden, jede Rechnung lässt sich wiederholen, und weitere Beobachtungen können Modelle voneinander unterscheiden.

Ein einfaches Modell kann gerade dann besonders lehrreich sein, wenn seine Grenzen sichtbar bleiben. Es zeigt, welche Schlüsse bereits aus wenigen Größen folgen. Der nächste Erkenntnisschritt besteht darin, gezielt eine Beobachtung zu suchen, auf die sich verschiedene Modelle unterschiedlich auswirken. Dadurch wird aus einer plausiblen Abschätzung eine zunehmend eng begrenzte Beschreibung.

14 Ein Arbeitsprogramm für eigene Untersuchungen

Stufe eins Die Dichte einer Probe

Der erste Durchgang soll einen verlässlichen Zusammenhang zwischen Beobachtung und Rechnung herstellen. Dafür genügt eine kompakte Gesteinsprobe. Zunächst werden Masse, Wasserstand ohne Probe und Wasserstand mit vollständig eingetauchter Probe dokumentiert. Bei der Volumenmessung werden Luftblasen und Wasserverluste kontrolliert. Jede Angabe erhält eine Einheit.

Anschließend folgen mindestens mehrere vollständige Wiederholungen. Für jede Wiederholung wird eine eigene Dichte berechnet. Eine zusätzliche Auswertung kann den Mittelwert der Massen und Volumina verwenden. Bei unterschiedlich großen Unsicherheiten ist eine geeignete Gewichtung nötig. Für einen einfachen Unterrichtsversuch reichen zunächst Mittelwert, Spannweite und eine begründete Abschätzung der Hauptfehler.

Ein zweites Verfahren kontrolliert das Volumen, etwa die im dritten Kapitel beschriebene hydrostatische Wägung. Wenn sich die Ergebnisse deutlich unterscheiden, wird die Ursache gesucht, bevor der Mittelwert gebildet wird. Zwei systematisch verschiedene Resultate durch bloßes Mitteln zusammenzufassen würde den Fehler verdecken.

Bei mehreren Gesteinen entsteht eine vergleichende Untersuchung. Die Proben können nach Herkunft, sichtbarer Struktur, Porosität und gemessener Dichte geordnet werden. Ein Unterschied zwischen zwei Dichten ist erst dann aussagekräftig, wenn er gegenüber den Unsicherheiten ausreichend groß ist. Eine Gesteinsart sollte zudem durch mehrere Proben vertreten sein, bevor ihre Variabilität beurteilt wird.

Stufe zwei Das Erdmodell durchrechnen

Im nächsten Schritt werden Radius, Masse und äußerer Dichtewert in einem Rechenblatt festgehalten. Aus ihnen folgen mittlere und zentrale Dichte sowie die Steigung. Danach wird der Radius in Stützstellen zerlegt. Für jede Stützstelle werden eingeschlossene Masse, Gravitationsbeschleunigung und Druck berechnet.

Die Ergebnisse müssen feste Kontrollen erfüllen. Am Mittelpunkt ist die eingeschlossene Masse null. An der Oberfläche entspricht sie der vorgegebenen Gesamtmasse. Die Feldstärke verschwindet im Mittelpunkt und erreicht an der Oberfläche GM/R^2 . Der Druck ist an der Oberfläche null und nimmt nach innen zu. Die Dichte bleibt im gesamten betrachteten Bereich positiv.

Eine Tabelle allein zeigt diese Beziehungen nur begrenzt. Diagramme machen Verläufe und mögliche Fehler sofort sichtbar. Die Achsen erhalten Größenbezeichnungen und Einheiten. Ein Radiusdiagramm beginnt links im Mittelpunkt. Ein Tiefendiagramm beginnt an der Oberfläche. Werden beide Darstellungen verwendet, muss die Umrechnung Tiefe = $R - r$ deutlich sein.

Eine besonders aufschlussreiche Variation besteht darin, den äußeren Dichtewert schrittweise zu verändern. Damit lässt sich untersuchen, wie stark die Zentraldichte reagiert. Anschließend wird die Form der Dichtefunktion variiert, wie im vorigen Kapitel. Der Vergleich trennt den Einfluss eines Messwerts vom Einfluss der Modellwahl.

Stufe drei Die Schwere mit einem Pendel messen

Zunächst wird das Pendel über einen längeren Zeitraum an einem Ort untersucht. Messreihen mit gleicher Länge und kleinen Auslenkungen prüfen die Wiederholbarkeit. Danach werden bewusst unterschiedliche Auslenkungen eingestellt. Die beobachtete Änderung der Periode zeigt, warum eine feste Amplitude für einen empfindlichen Vergleich nötig ist.

Eine Längenvariation liefert eine weitere Kontrolle. Wird die Länge vervierfacht, verdoppelt sich im Idealmodell die Periode. In einer Auftragung von T^2 gegen l sollten die Werte näherungsweise auf einer Geraden liegen. Ihre Steigung beträgt $4\pi^2/g$. Ein von null verschiedener Achsenabschnitt kann unter anderem auf einen konstanten Fehler der Längengdefinition hinweisen.

Für den Unterricht hat dieser Schritt einen eigenen Wert, auch wenn kein Höhenvergleich folgt. Die Schwere wird aus selbst gemessenen Längen und Zeiten bestimmt. Zugleich werden Modellgrenzen wie endliche Amplitude, räumliche Ausdehnung des Pendelkörpers und Reibung experimentell zugänglich.

Stufe vier Ein anspruchsvoller Höhenvergleich

Ein Ortsvergleich sollte erst beginnen, wenn die Stabilität des Pendels am selben Ort bekannt ist. Ein geeigneter Ablauf lautet untere Station, obere Station, erneut untere Station. Die Rückkehrmessung zeigt, ob sich das Gerät während des Transports oder im Zeitverlauf verändert hat. Bei längeren Untersuchungen kann eine wiederholte Folge solcher Wechsel sinnvoll sein.

Zu jeder Reihe gehören Uhrzeit, Stationslage, Aufhängehöhe, Temperatur, Luftdruck, Amplitude und Messdauer. Die effektive Pendellänge und jede Veränderung des Aufbaus werden festgehalten. Die Messdaten bleiben von Korrekturwerten getrennt. So lässt sich später nachvollziehen, welche Differenz tatsächlich beobachtet und welcher Anteil rechnerisch einem Einfluss zugeordnet wurde.

Vor einer Bestimmung des Erdradius ist ein Modell der zu erwartenden lokalen Schweredifferenz erforderlich. Die Wahl der Stationen soll Breitenunterschiede klein halten und die Geländegeometrie

überschaubar machen. Auch eine vertikale Messstrecke in einem Gebäude ist nicht völlig frei von zusätzlichen Massenbeiträgen. Der Zweck der Standortwahl besteht darin, diese Beiträge erfassbar zu machen.

Wenn die Unsicherheit größer als der gesuchte Effekt bleibt, lautet das Ergebnis, dass die Messung den Effekt unter den verwendeten Bedingungen nicht ausreichend auflöst. Ein solches Resultat kann einen guten Versuch kennzeichnen, wenn die Fehlerbilanz überzeugend ist. Es ist sachlich wertvoller als ein zufällig erdähnlicher Radius aus einer instabilen Differenz.

Das vollständige Ergebnisprotokoll

Ein gutes Protokoll enthält die Ausgangsfrage, eine Skizze des Aufbaus, die Rohwerte und ihre Einheiten. Es beschreibt die verwendeten Formeln mit deren Voraussetzungen. Berechnete Werte werden sinnvoll gerundet und zusammen mit Unsicherheiten angegeben. Abweichungen zwischen Wiederholungen, Kontrollmethoden und Referenzwerten bleiben sichtbar.

Die abschließende Interpretation benennt den tatsächlich erreichten Erkenntnisstand. Eine gemessene Gesteinsdichte, eine modellabhängige Zentralsdichte und eine aus einem idealisierten Pendelvergleich berechnete Erdmasse sind unterschiedliche Arten von Ergebnissen. Ihre Verbindung bildet den Inhalt dieses Buches. Die Verbindung bleibt überzeugend, wenn jeder Schritt seine eigene empirische und mathematische Begründung erhält.

Anhang A Die Herleitungen im Zusammenhang

A1 Kugelschalen und lineare Dichte

Aus einer dünnen Kugelschale mit Radius s und Dicke ds folgt $dV = 4\pi s^2 ds$. Die Masse dieser Schale ist $\rho(s)dV$. Für $\rho(s) = \rho_c + as$ wird die bis r eingeschlossene Masse:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r (\rho_c + as)s^2 ds = \frac{4\pi}{3} \rho_c r^3 + \pi a r^4 \quad (40)$$

Mit $\rho(r) = \rho_c + ar$ kann dieselbe Formel anders geschrieben werden:

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} \rho(r) r^3 - \frac{\pi}{3} a r^4 \quad (41)$$

Die beiden Darstellungen sind algebraisch identisch. Für die Gesamtmasse wird $r = R$ gesetzt. Die Differenzierung der ersten Darstellung liefert $dm/dr = 4\pi \rho(r) r^2$ und stellt damit eine unmittelbare Kontrolle der Integration dar.

A2 Die Druckintegration

Das Produkt aus Dichte und Gravitationsbeschleunigung lautet nach Ausmultiplizieren:

$$\rho(r)g(r) = \pi G \left(\frac{4}{3} \rho_c^2 r + \frac{7}{3} a \rho_c r^2 + a^2 r^3 \right) \quad (42)$$

Die Faktoren $4/3$, $7/3$ und 1 entstehen durch die Multiplikation der beiden linearen beziehungsweise quadratischen Ausdrücke. Bei der Integration kommt jeweils der nächste Potenzexponent in den Nenner. Daraus folgen $2/3$, $7/9$ und $1/4$ in der Hilfsfunktion F .

$$p(r) = \pi G \left[\frac{2}{3} \rho_c^2 (R^2 - r^2) + \frac{7}{9} a \rho_c (R^3 - r^3) + \frac{1}{4} a^2 (R^4 - r^4) \right] \quad (43)$$

Zur Prüfung wird die Funktion nach r abgeleitet. Das Ergebnis muss $-\rho(r)g(r)$ sein. Für $r = R$ verschwinden alle Differenzen. Für $r = 0$ entsteht der Zentraldruck. Diese drei Kontrollen prüfen unabhängig voneinander Vorzeichen, Randbedingung und Zentralwert.

Eine kompakte dimensionslose Form verwendet $x = r/R$ und $b = aR$. Dann ist $\rho = \rho_c + bx$ und die Druckskala wird durch $\pi G R^2$ gesetzt. Die numerische Rechnung arbeitet dadurch mit Radien zwischen null und eins. Die physikalische Dimension steckt vollständig in den vorangestellten Größen und den Dichten.

A3 Das Trägheitsmoment

Eine dünne Kugelschale besitzt um eine Achse durch ihren Mittelpunkt das Trägheitsmoment $dI = (2/3)r^2 dm$. Einsetzen ihrer Masse und Integration führen für das lineare Modell zu:

$$I = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\rho_c R^5}{5} + \frac{a R^6}{6} \right) \quad (44)$$

Die Division durch MR^2 ergibt den dimensionslosen Vergleichswert. Für $a = 0$ und $\rho_c = \bar{\rho}$ folgt $2/5$. Für die im Buch verwendete lineare Verteilung ergibt sich $0,332445$. Die Kontrollrechnung mit einer homogenen Kugel prüft insbesondere den geometrischen Faktor $2/3$.

A4 Unsicherheit des Pendelergebnisses

Für $R = hT_0/\Delta T$ ergibt die logarithmische Differenzierung $\delta R/R = \delta h/h + \delta T_0/T_0 - \delta(\Delta T)/\Delta T$. Die kleine Differenz im Nenner erklärt die hohe Empfindlichkeit. Für unabhängige Eingangsgrößen werden die relativen Standardunsicherheiten quadratisch addiert. Bei $\Delta T = T_h - T_0$ sind T_0 und ΔT jedoch im Allgemeinen korreliert.

Mit $q = T_h/T_0$ lautet die Radiusformel $R = h/(q - 1)$. Falls h und q unabhängig bestimmt wurden, folgt:

$$\frac{u(R)}{R} \approx \sqrt{\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(q)}{q-1}\right)^2} \quad (45)$$

Für die Masse gilt M proportional zu $lh^2/(G\Delta T^2)$. Die relativen Beiträge der Höhen- und Periodendifferenzfehler treten daher mit dem Faktor zwei auf. Wenn die Eingangsgrößen unabhängig sind, lautet die entsprechende Näherung:

$$\frac{u(M)}{M} \approx \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(\frac{u(G)}{G}\right)^2 + 4\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{u(\Delta T)}{\Delta T}\right)^2} \quad (46)$$

Diese Formeln beschreiben die Fortpflanzung kleiner Messunsicherheiten. Nicht erfasste Gelände-, Temperatur- oder Rotationsbeiträge werden dadurch nicht automatisch berücksichtigt. Sie müssen vor der Unsicherheitsrechnung als eigene Einflussgrößen in das Messmodell aufgenommen werden.

Anhang B Rechenwerte und Messprotokolle

B1 Festgelegte Eingangsgrößen

Die Hauptrechnung verwendet die nachstehenden Größen. Die Gesteinsdichte ist bewusst gerundet. Die Anzahl dargestellter Ziffern bei den Erdparametern dient der Reproduzierbarkeit, nicht einer entsprechenden Genauigkeitsbehauptung für das Gesamtmodell.

Größe	Symbol	Wert
Mittlerer Erdradius	R	6.371.000 m
Erdmasse	M	$5,9722 \cdot 10^{24}$ kg
Gravitationskonstante	G	$6,67430 \cdot 10^{-11}$ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Äußerer Dichtewert	ρ_s	2.720 kg/m ³
Mittlere Erddichte	$\bar{\rho}$	5.513,44 kg/m ³
Zentraldichte im Modell	ρ_c	13.893,77 kg/m ³
Lineare Steigung	a	$-1,75385 \cdot 10^{-3}$ kg/m ⁴

B2 Ergebnisse im linearen Modell

Radius und Tiefe sind durch $\text{Tiefe} = R - r$ verbunden. Die Werte der folgenden Tabelle stammen aus den analytischen Funktionen. Die eingeschlossene Masse ist als Anteil an der Gesamtmasse angegeben. Die Zeilen bei 1.221,5 km und 3.480 km dienen dem Vergleich mit PREM-Grensradien. Im linearen Modell selbst liegen dort keine Schichtgrenzen vor.

Radius km	Tiefe km	Dichte g/cm ³	Massenanteil m(r)/M	Schwere m/s ²	Druck GPa
0,0	6.371,0	13,894	0,0000	0,000	333,26
1.000,0	5.371,0	12,140	0,0088	3,517	310,09
1.221,5	5.149,5	11,751	0,0157	4,196	299,89
2.000,0	4.371,0	10,386	0,0632	6,298	254,54
3.000,0	3.371,0	8,632	0,1884	8,343	184,65
3.480,0	2.891,0	7,790	0,2754	9,064	150,31
4.000,0	2.371,0	6,878	0,3875	9,653	114,58
5.000,0	1.371,0	5,125	0,6415	10,228	54,64
6.000,0	371,0	3,371	0,9092	10,067	11,25
6.371,0	0,0	2,720	1,0000	9,820	0,00

B3 Numerische Berechnung eines beliebigen Profils

Ein beliebiger positiver Dichteverlauf kann über dünne Kugelschalen ausgewertet werden. Für jede Schale wird zuerst ihre Masse berechnet und zur inneren Masse addiert. Daraus folgt das Gravitationsfeld.

Anschließend wird der Druck von außen nach innen aufintegriert. Bei einem Dichtesprung sollen die Radien beiderseits der Grenze ausdrücklich berücksichtigt werden.

$$\Delta m_i \approx \frac{4\pi}{3} \rho_i (r_{i+1}^3 - r_i^3) \quad (47)$$

$$g_i = \frac{Gm_i}{r_i^2}, \quad g(0) = 0 \quad (48)$$

$$p_i \approx p_{i+1} + \frac{\rho_i g_i + \rho_{i+1} g_{i+1}}{2} (r_{i+1} - r_i) \quad (49)$$

Die erste Näherung setzt die Dichte innerhalb einer Schale als konstant an. Die letzte Gleichung verwendet die Trapezregel. Eine kleinere Schrittweite sollte die Ergebnisse nur noch wenig verändern. Am Mittelpunkt wird die Grenzbedingung $g(0) = 0$ direkt gesetzt, damit keine Division durch null erfolgt. Bei schichtweise bekannten Polynomen lässt sich die Masse jeder Schale auch exakt integrieren.

B4 Angaben für ein Steinprotokoll

Ein vollständiges Steinprotokoll enthält Probenkennzeichnung, Herkunft soweit bekannt, vermutete Gesteinsart und Zustand der Probe. Es hält das verwendete Gefäß, dessen Kalibrierung und die Auflösung der Waage fest. Für jede Wiederholung werden Masse, Wasserstände, Volumendifferenz und berechnete Dichte dokumentiert. Beobachtete Luftblasen, Wasserverluste oder eine erkennbare Wasseraufnahme werden vermerkt.

Die Auswertung nennt Mittelwert, Streuung, geschätzte systematische Beiträge und das angewandte Rundungsverfahren. Ein Foto von Waage und Wasserstand unterstützt die Dokumentation. Die eigentlichen Rohwerte werden zusätzlich schriftlich festgehalten, damit die Auswertung nicht allein von einer späteren Bildablesung abhängt.

B5 Angaben für ein Pendelprotokoll

Ein Pendelprotokoll nennt Pendelkörper, Aufhängung und Definition der wirksamen Länge. Zur Messreihe gehören maximale Auslenkung, Zahl vollständiger Perioden, gemessene Gesamtzeit und verwendete Zeitbasis. Für einen Ortsvergleich kommen Stationskoordinaten, Aufhängehöhen und die Zeitpunkte der Messungen hinzu.

Temperatur, Luftdruck und ausreichende Anpassungszeit nach dem Transport werden dokumentiert. Rohperioden und korrigierte Perioden erhalten getrennte Einträge. Die Korrekturen werden mit ihrem physikalischen Grund, ihrem Vorzeichen und ihrer Unsicherheit angegeben. Die Rückkehrmessung an der Ausgangsstation ist als eigenständige Kontrolle zu behandeln.

Anhang C Aufgaben mit erläuterten Lösungen

C1 Ein anderer Stein

Eine kompakte Probe hat eine Masse von 540 g. Der Wasserstand steigt von 350 ml auf 550 ml. Wie groß ist die Dichte, und welche typische Verwechslung wäre zu vermeiden?

Lösung. Das Steinvolumen beträgt 200 cm^3 , weil die Differenz der Wasserstände verwendet wird. Die Dichte beträgt $540/200 = 2,70 \text{ g/cm}^3$. Das gesamte Endvolumen von 550 ml wäre als Steinvolumen falsch. Es enthält weiterhin das ursprünglich vorhandene Wasser.

C2 Eine Änderung der Randdichte

Die mittlere Erddichte bleibt auf $5,5134 \text{ g/cm}^3$ festgelegt. Die äußere Dichte werde von $2,72$ auf $2,82 \text{ g/cm}^3$ erhöht. Wie ändert sich die Zentralkichte des linearen Modells?

Lösung. Aus $\rho_c = 4\rho - 3\rho_s$ folgt eine Abnahme um $0,30 \text{ g/cm}^3$. Die Zentralkichte beträgt dann ungefähr $13,59 \text{ g/cm}^3$. Die Gegenläufigkeit entsteht, weil bei unveränderter Gesamtmasse eine dichtere äußere Region weniger zusätzliche Masse im Inneren verlangt.

C3 Die falsche Mittelwertbildung

Weshalb liefert der arithmetische Mittelwert aus $2,72$ und $13,89 \text{ g/cm}^3$ nicht die mittlere Dichte des linearen Erdmodells?

Lösung. Der Mittelwert entlang einer Radiuslinie gewichtet gleiche Strecken gleich. Die Gesamtmasse gewichtet dagegen jedes Radiusintervall mit seinem Kugelschalenvolumen, also mit r^2 . Die großen äußeren Schalen haben die kleinere Dichte und dominieren das Volumen. Deshalb liegt der Volumenmittelwert deutlich unter dem einfachen Mittel aus den Endwerten.

C4 Ein scheinbarer Erdradius

Ein idealisiertes unverändertes Pendel besitzt unten $T_0 = 2,0000 \text{ s}$. Bei $h = 1.000 \text{ m}$ sei die obere Periode um $0,00032 \text{ s}$ länger. Welcher Radius folgt?

Lösung. $R = 1.000 \cdot 2,0000/0,00032 \text{ m} = 6.250.000 \text{ m}$, also 6.250 km . Die Nähe zum mittleren Erdradius ist bei diesen Beispieldaten beabsichtigt. In einem realen Versuch müsste geprüft werden, ob die Periodendifferenz vollständig auf den Höhenunterschied zurückzuführen ist.

C5 Eine Sekunde Gangunterschied

Wie lange dauert es im idealisierten Kugelfeld bei 100 Metern Höhenunterschied, bis eine auf die untere Station eingestellte Uhr oben eine Sekunde nachgeht?

Lösung. $t = (R + h)/h$ Sekunden ergibt bei $R = 6.371.000 \text{ m}$ eine Dauer von 63.711 s . Das sind etwa $17 \text{ Stunden } 42 \text{ Minuten}$. Die Größenordnung zeigt, dass selbst ein deutlicher Gebäudehöhenunterschied eine lange und stabile Messung erfordert.

C6 Der Bergbeitrag

Der reine Höhenverlust der Schwere sei $-0,00308 \text{ m/s}^2$. Zusätzliche Gesteinsmasse trage $+0,00112 \text{ m/s}^2$ bei. Was geschieht mit dem ohne Korrektur berechneten Erdradius?

Lösung. Die beobachtete Abnahme beträgt nur ungefähr $-0,00196 \text{ m/s}^2$. Die Periodenänderung fällt entsprechend kleiner aus. In der Formel $R = hT_0/\Delta T$ steht eine kleinere Zahl im Nenner, sodass der scheinbare Radius zu groß wird. In erster Näherung läge er bei rund dem $1,57$ -fachen des richtigen Radius. Die Zahlen beschreiben ein vereinfachtes Beispiel, kein konkretes Gelände.

C7 Druck und Schwere im Zentrum

Kann der Druck im Erdmittelpunkt maximal sein, obwohl die resultierende Gravitationsbeschleunigung dort null ist?

Lösung. Ja. Die hydrostatische Gleichung verknüpft die Beschleunigung mit dem Druckgradienten. Im Zentrum ist der Gradient null, während der Druckwert hoch sein kann. Die Kompression durch die umgebenden Schichten bleibt vorhanden, obwohl sich ihre gerichteten Anziehungen am Mittelpunkt aufheben.

C8 Die Prüfung eines Modells

Zwei kugelsymmetrische Dichteprofile besitzen dieselbe Masse und denselben Radius. Kann eine zusätzliche Messung der äußeren Feldstärke auf einer höheren Kreisbahn die beiden radialen Profile unterscheiden?

Lösung. Im idealen Newtonschen Kugelfeld nicht. Außerhalb erzeugen beide Profile dasselbe GM/r^2 . Eine Beobachtung mit anderer innerer Gewichtung, etwa das Trägheitsmoment oder geeignete seismische Daten, kann zusätzliche Information liefern. Das Beispiel zeigt eine Grenze des Informationsgehalts einer Messart, keine Grenze der technischen Präzision.

Anhang D Begriffe und Formelzeichen

Das Glossar als Lesehilfe

Die folgenden Erläuterungen setzen keine physikalische Fachausbildung voraus. Sie erklären die Begriffe zunächst in Worten, verbinden sie mit einem anschaulichen Beispiel und zeigen anschließend ihre Bedeutung für die Experimente und Erdmodelle dieses Buches. Die Einträge sind alphabetisch geordnet. Bei verwandten Begriffen lohnt sich das gemeinsame Lesen, beispielsweise von Masse, Dichte und Volumen oder von Druck, Druckgradient und hydrostatischem Gleichgewicht.

Begriffe von A bis Z

Ableitung. Eine Ableitung beschreibt, wie schnell sich eine Größe ändert, wenn eine andere verändert wird. Auf einer Straßenkarte wäre die Höhe des Geländes die eine Größe und der zurückgelegte Weg die andere. Die Steigung gibt dann an, wie viel Höhe auf einer kurzen Strecke hinzugewonnen wird. Entsprechend beschreibt die Ableitung der Dichte nach dem Radius, wie sich die Dichte beim Weg nach außen verändert. Der Ausdruck dp/dr bezeichnet die räumliche Änderung des Drucks. Eine Ableitung gibt also eine örtliche Änderungsrate an; sie ist weder die betreffende Größe selbst noch deren Mittelwert.

Amplitude. Die Amplitude ist die größte Auslenkung einer Schwingung aus ihrer Ruhelage. Bei einem Pendel lässt sie sich als größter Winkel zwischen Faden und Lotrichtung angeben. Ein nur wenig ausgelenktes Pendel hat eine kleine Amplitude, ein weit zur Seite gezogenes eine große. Die einfache Pendelformel gilt näherungsweise für kleine Winkel. Bei größeren Winkeln dauert die Schwingung etwas länger. Für den empfindlichen Vergleich zweier Höhen müssen deshalb möglichst gleiche kleine Amplituden verwendet werden. Sonst kann ein Unterschied der Ausschläge einen Unterschied der Schwerkraft vortäuschen.

Auftrieb. Ein Körper in Wasser oder Luft erfährt eine nach oben gerichtete Kraft. Sie entsteht, weil der Druck an seiner Unterseite größer ist als an seiner Oberseite. Der Auftrieb entspricht dem Gewicht des

verdrängten Mediums. Ein Stein fühlt sich unter Wasser deshalb leichter an, obwohl seine Masse praktisch unverändert bleibt. Diese Wirkung kann zur Volumenbestimmung genutzt werden. Auch ein Pendelkörper erfährt in Luft Auftrieb. Bei sehr genauen Messungen muss beachtet werden, dass sich die Luftdichte mit Druck und Temperatur und damit auch der Auftrieb verändert.

Beschleunigung. Beschleunigung bezeichnet eine Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit. Auch eine Richtungsänderung ist eine Beschleunigung, selbst wenn der Betrag der Geschwindigkeit gleich bleibt. Die Einheit m/s^2 bedeutet: Die Geschwindigkeit verändert sich pro Sekunde um eine bestimmte Zahl von Metern je Sekunde. Eine annähernd konstante Fallbeschleunigung von $9,8 \text{ m/s}^2$ würde die Fallgeschwindigkeit ohne Luftwiderstand in jeder Sekunde um etwa $9,8 \text{ m/s}$ vergrößern. Beim Pendel wirkt nur ein Teil der Gewichtskraft entlang seiner gekrümmten Bewegungsbahn; dieser Anteil treibt es zur Ruhelage zurück.

Dichte. Die Dichte sagt, wie viel Masse in einem bestimmten Volumen enthalten ist. Ein kleines Metallstück kann mehr Masse besitzen als ein viel größeres Stück Schaumstoff, weil Metall dichter ist. Eine Dichte von $2,72 \text{ g/cm}^3$ bedeutet, dass ein Kubikzentimeter des betrachteten Materials $2,72$ Gramm Masse hat. Im Steinversuch werden Masse und Volumen getrennt gemessen und anschließend dividiert. Bei der Erde ist zwischen der örtlichen Dichte, der mittleren Dichte der gesamten Erde und der Dichte im Zentrum zu unterscheiden. Ein einziger Mittelwert verrät noch nicht, wie sich das Material im Inneren verteilt.

Dichtesprung. Ein Dichtesprung ist ein abrupter Wechsel der Dichte an einer Grenze zwischen zwei Bereichen. Anschaulich besitzt ein Gefäß mit getrennten Öl- und Wasserschichten an der Grenzfläche einen solchen Wechsel. In einem Erdmodell können unterschiedliche Zusammensetzungen oder Zustände des Materials durch Dichtesprünge dargestellt werden. PREM enthält solche Grenzen, beispielsweise zwischen Mantel und äußerem Kern. Das lineare Modell besitzt dagegen eine stetige Dichtekurve. Die Kurve kann eine brauchbare globale Abschätzung liefern, enthält aber keine Information darüber, wo eine konkrete Schichtgrenze liegt.

Druck. Druck beschreibt, wie stark eine Kraft auf eine Fläche verteilt ist. Derselbe Kraftbetrag wirkt auf einer kleinen Fläche konzentrierter als auf einer großen. Deshalb drückt eine schmale Kante stärker in eine weiche Unterlage als eine breite Auflage. In einer ruhenden Flüssigkeit wirkt der Druck am betrachteten Ort in alle Richtungen gleich. Die Einheit Pascal entspricht einem Newton pro Quadratmeter; ein Gigapascal ist eine Milliarde Pascal. Im Erdinneren entsteht der hohe Druck durch die Belastung der tiefer liegenden Materie. Für feste Erdbereiche beschreibt das hydrostatische Modell den allseitigen Anteil dieser Belastung näherungsweise.

Druckgradient. Der Druckgradient beschreibt, wie stark sich der Druck von einem Ort zum nächsten verändert. Beim Tauchen nimmt der Wasserdruck mit der Tiefe zu; der Druckgradient gibt die Zunahme pro Strecke an. Ein hoher Druck bedeutet nicht automatisch eine starke örtliche Änderung. Am Erdmittelpunkt kann der Druck sehr hoch sein und sich in unmittelbarer Umgebung dennoch nur wenig ändern. Im kugelsymmetrischen Modell verschwindet dort die erste räumliche Ableitung des Drucks. Der Druckwert und seine Änderung müssen deshalb auseinandergehalten werden. Die Ableitung dp/dr ist bei nach außen wachsendem Radius im Erdinneren negativ.

Eingeschlossene Masse. Damit ist die gesamte Masse innerhalb einer gedachten Kugel um den Erdmittelpunkt gemeint. Der Radius dieser Kugel legt fest, wie viel vom Erdinneren mitgezählt wird. Nahe dem Mittelpunkt ist wenig Masse eingeschlossen, an der Erdoberfläche die gesamte Erdmasse. Bei Kugelsymmetrie bestimmt diese eingeschlossene Masse das Gravitationsfeld am betrachteten Radius. Die weiter außen liegenden vollständigen Kugelschalen tragen dort insgesamt keine resultierende Anziehung

bei. Das bedeutet nicht, dass ihre einzelnen Teile nicht anziehen, sondern dass sich ihre Beiträge gegenseitig aufheben.

Erdkruste, Mantel und Kern. Diese Begriffe bezeichnen große Bereiche des Erdaufbaus. Die Kruste bildet die dünne äußere Gesteinshülle. Darunter liegt der wesentlich mächtigere Mantel. Seine Gesteine sind überwiegend fest, können sich aber über geologische Zeiträume langsam verformen und bewegen. Weiter innen folgen der flüssige äußere und der feste innere Kern. Diese Einteilung beruht auf zusätzlichen geophysikalischen Beobachtungen, insbesondere auf Erdbebenwellen. Ein glatt ansteigender Dichtewert allein reicht nicht aus, um die Bereiche zu erkennen oder ihren Aggregatzustand zu bestimmen. Das lineare Modell des Buches enthält diese Gliederung daher nicht ausdrücklich.

Freiluftänderung. Der Begriff bezeichnet den Anteil einer Schwereänderung, der durch den veränderten Abstand zur Erde entsteht. Im idealen Kugelmodell wird die Anziehung schwächer, wenn sich der Beobachtungsort nach oben verlagert. Die Bezeichnung bedeutet nicht, dass eine Messung zwingend im Freien stattfinden muss. Sie trennt den Abstandseffekt rechnerisch von der Anziehung zusätzlicher Gesteinsmassen. Auf einem Berg treten beide Wirkungen gleichzeitig auf: Der größere Abstand vermindert die Anziehung der Erde, das Gestein des Berges trägt selbst zur örtlichen Anziehung bei. Für genaue Höhenvergleiche müssen diese Beiträge berücksichtigt werden.

Gravitation. Gravitation ist die gegenseitige Anziehung von Massen. Sie hält unter anderem die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne und zieht einen losgelassenen Gegenstand zum Erdboden. Im Newtonschen Modell hängt die Anziehung von den beteiligten Massen und ihrem Abstand ab. Ein ausgedehnter Körper wird dabei als Summe sehr vieler kleiner Massenteile behandelt. Für kugelsymmetrische Körper vereinfacht sich diese Rechnung erheblich. Die im Buch verwendete Gravitation beschreibt die Massenanziehung; die tatsächlich gemessene örtliche Schwere auf der rotierenden Erde enthält zusätzlich die Wirkung der Erdrotation.

Gravitationskonstante. Die Konstante G legt die Stärke der Massenanziehung im Newtonschen Gravitationsgesetz fest. Ihr Wert wird in eigenen Experimenten bestimmt und anschließend in Rechnungen eingesetzt. Sie ist von der örtlichen Schwerebeschleunigung g zu unterscheiden: G ist eine universelle Konstante des verwendeten Gesetzes, g hängt vom Ort und von der umgebenden Massenverteilung ab. Das große und das kleine Zeichen stehen somit für verschiedene Größen. Eine Pendelmessung liefert Informationen über g . Um daraus die Erdmasse zu berechnen, muss G zusätzlich bekannt sein.

Hydrostatisches Gleichgewicht. In einer ruhenden Wassersäule muss der Druck nach unten zunehmen, damit eine dünne Wasserschicht das Gewicht der darüberliegenden Schichten tragen kann. Der Unterschied zwischen dem Druck an Unter- und Oberseite liefert die ausgleichende Kraft. Diesen Zusammenhang beschreibt das hydrostatische Gleichgewicht. Er wird im Buch näherungsweise auf die gesamte Erde übertragen: Der nach innen zunehmende Druck gleicht die örtliche Gewichtsbelastung aus. Daraus folgt nicht, dass die gesamte Erde flüssig ist. In festen Materialien können zusätzlich gerichtete Spannungen auftreten, die das vereinfachte hydrostatische Modell nicht vollständig erfasst.

Integral. Ein Integral ist eine mathematisch präzise Form des Aufsummierens. Um die Masse eines Körpers mit wechselnder Dichte zu berechnen, kann er gedanklich in viele kleine Teile zerlegt werden. Für jeden Teil wird Dichte mal Volumen berechnet; anschließend werden die Teilmassen addiert. Werden die Teile immer feiner, führt dieses Verfahren zum Integral. Für eine kugelsymmetrische Erde bieten sich dünne Kugelschalen an. Auch der Druck wird durch Aufsummieren kleiner Beiträge bestimmt. Die Grenzen am Integralzeichen geben an, von welchem bis zu welchem Radius summiert wird.

Inverses Problem. Bei einem gewöhnlichen Rechenproblem wird ein angenommener Aufbau vorgegeben und seine Wirkung berechnet. Beim inversen Problem ist eine Wirkung gemessen, und gesucht wird ein dazu passender Aufbau. Das Gewicht einer geschlossenen Kiste lässt sich messen, ohne ihren Inhalt zu sehen. Verschiedene Anordnungen können dasselbe Gewicht ergeben. Entsprechend legt die Erdmasse allein die innere Dichteverteilung nicht fest. Weitere Beobachtungen müssen die Möglichkeiten einschränken. Die verbleibende Mehrdeutigkeit ist kein bloßer Messfehler: Sie kann selbst dann bestehen, wenn die betrachtete Wirkung vollkommen genau bekannt ist.

Kalibrierung. Kalibrieren bedeutet, die Anzeige eines Messgeräts mit bekannten Referenzwerten zu vergleichen und die Beziehung zwischen Anzeige und Messgröße festzustellen. Bei einem Gefäß kann beispielsweise geprüft werden, welcher Volumenzunahme eine bestimmte Höhenänderung des Wassers entspricht. Bei einer Waage lässt sich mit geeigneten Prüfgewichten untersuchen, wie ihre Anzeige vom tatsächlichen Wert abweicht. Eine festgestellte Abweichung kann anschließend rechnerisch berücksichtigt werden. Kalibrierung ist nicht dasselbe wie Justierung: Justieren verändert die Einstellung des Geräts, Kalibrieren beschreibt zunächst dessen Messverhalten.

Kugelsymmetrie. Ein Modell ist kugelsymmetrisch, wenn an allen Orten mit demselben Abstand zum Mittelpunkt dieselben betrachteten Eigenschaften gelten. Die Dichte darf nach innen oder außen wechseln, aber nicht seitlich entlang einer gedachten Kugelfläche. Ein Schalenkörper mit überall gleichmäßig aufgebauten konzentrischen Schichten veranschaulicht diese Vorstellung. Die reale Erde besitzt Gebirge, unterschiedliche Gesteine und eine Abplattung. Kugelsymmetrie ist deshalb eine vereinfachende Annahme. Sie macht die Rechnung überschaubar, weil die räumliche Verteilung durch eine einzige Veränderliche, den Radius, beschrieben werden kann.

Lineares Modell. Linear bedeutet hier, dass sich die Dichte bei gleichen Schritten im Radius stets um denselben Betrag ändert. Ein Diagramm dieses Zusammenhangs ist eine Gerade. Aus einem Zentralwert und einer konstanten Steigung lässt sich dann die Dichte an jedem Radius berechnen. Die Randdichte und die Gesamtmasse legen im Buch beide Parameter fest. Diese einfache Form erleichtert die vollständige Herleitung von Masse, Gravitation und Druck. Sie wird dadurch jedoch nicht zu einer gemessenen Eigenschaft der Erde. Insbesondere bildet eine einzige Gerade weder Dichtesprünge noch unterschiedliche Erdschichten ab.

Masse und Gewichtskraft. Die Masse beschreibt unter anderem, wie träge sich ein Körper einer Beschleunigung widersetzt. Sie wird in Kilogramm angegeben. Die Gewichtskraft ist die Kraft, mit der der Körper am jeweiligen Ort durch die Schwere belastet wird; ihre Einheit ist Newton. Auf dem Mond hätte derselbe Stein nahezu dieselbe Masse, aber eine deutlich kleinere Gewichtskraft. Im Alltag wird beides häufig mit dem Wort Gewicht bezeichnet. Eine Küchenwaage zeigt gewöhnlich eine Masse an, obwohl ihr Messmechanismus auf einer Kraftwirkung beruht. Für die physikalische Auswertung müssen beide Größen begrifflich getrennt bleiben.

Meniskus. Der Meniskus ist die gekrümmte Oberfläche einer Flüssigkeit an der Gefäßwand. Bei Wasser in sauberem Glas steigt die Flüssigkeit am Rand gewöhnlich etwas höher als in der Mitte. Dadurch ist der Wasserspiegel keine vollständig ebene Linie. Für viele Messgefäße wird am unteren Punkt dieses Meniskus abgelesen; maßgeblich ist die vorgesehene Ableseregeln des Gefäßes. Im Steinversuch müssen beide Wasserstände nach derselben Regel und möglichst auf Augenhöhe bestimmt werden. Ein Wechsel zwischen Rand und Mitte würde eine scheinbare Volumenänderung erzeugen.

Messunsicherheit. Eine Messung liefert einen Wert mit einem begrenzten Genauigkeitsbereich. Die Messunsicherheit beschreibt, wie gut dieser Wert durch das Verfahren und die verfügbaren Informationen bestimmt ist. Beim Steinversuch tragen unter anderem die Waagenanzeige, die Gefäßskala, die

Blickrichtung und mögliche Luftblasen dazu bei. Eine gemessene Dichte von $2,72 \text{ g/cm}^3$ bedeutet deshalb keine unbegrenzt genaue Kenntnis. Wiederholungen zeigen einen Teil der Streuung. Sie decken aber nicht automatisch gemeinsame systematische Abweichungen auf, etwa eine falsch kalibrierte Skala. Zur Auswertung gehören daher sowohl Wiederholungen als auch eine Prüfung des Messverfahrens.

Mittelwert und Gewichtung. Ein Mittelwert fasst mehrere Werte zusammen. Welche Werte wie stark eingehen, hängt von der Fragestellung ab. Beim einfachen arithmetischen Mittel erhalten alle Zahlen dasselbe Gewicht. Die mittlere Erddichte wird dagegen aus Gesamtmasse geteilt durch Gesamtvolumen bestimmt. Äußere Kugelschalen besitzen bei gleicher Dicke mehr Volumen als innere und gehen deshalb stärker ein. Aus diesem Grund ist der Mittelwert zwischen Oberflächen- und Zentraldichte nicht die mittlere Dichte der linearen Modellkugel. Die richtige Gewichtung folgt hier aus der räumlichen Geometrie.

Modellunsicherheit. Ein Modell beschreibt die Wirklichkeit mithilfe ausgewählter Annahmen. Die Unsicherheit seiner Ergebnisse hängt deshalb auch davon ab, wie gut diese Annahmen passen. Beim Erdmodell betrifft das beispielsweise Kugelsymmetrie und den geradlinigen Dichteverlauf. Eine noch genauere Steinwägung beseitigt nicht die Unsicherheit, ob diese Modellform den tatsächlichen Erdaufbau ausreichend beschreibt. Unterschiedliche plausible Formen können trotz gleicher Ausgangsdaten verschiedene Zentraldichten ergeben. Messunsicherheit betrifft die Bestimmung der eingesetzten Größen; Modellunsicherheit betrifft die Angemessenheit ihrer mathematischen und physikalischen Verknüpfung.

Newton und Newtonsches Gravitationsgesetz. Newton ist sowohl der Name des Physikers Isaac Newton als auch die Bezeichnung einer Krafteinheit. Eine Kraft von einem Newton beschleunigt eine Masse von einem Kilogramm um einen Meter je Sekunde und Sekunde. Das nach Newton benannte Gravitationsgesetz beschreibt die Anziehung zweier Punktmassen. Bei gleichbleibenden Massen sinkt die Kraft auf ein Viertel, wenn ihr Abstand verdoppelt wird. Für ausgedehnte Körper müssen die Beiträge ihrer Massenteile zusammengefasst werden. Bei kugelsymmetrischer Verteilung führt dies zu den besonders einfachen Beziehungen, die im Buch verwendet werden.

Parallaxe. Parallaxe bezeichnet eine scheinbare Verschiebung durch einen Wechsel der Blickrichtung. Wird ein Finger vor einen entfernten Hintergrund gehalten und abwechselnd mit dem linken und rechten Auge betrachtet, scheint er gegenüber dem Hintergrund zu springen. Beim Ablesen eines Wasserstands entsteht derselbe Grundeffekt, wenn Skala und Flüssigkeitsspiegel räumlich getrennt liegen. Ein schräger Blick kann dann einen falschen Höhenwert liefern. Ablesen auf gleicher Augenhöhe vermindert diesen Fehler. Bei Fotografien müssen zusätzlich die Perspektive und die Lage des Maßstabs zur abzulesenden Struktur berücksichtigt werden.

Periode. Die Periode ist die Zeit für eine vollständige Wiederholung einer Schwingung. Ein Pendel, das an einem Umkehrpunkt startet, muss zum gegenüberliegenden Umkehrpunkt und wieder zurück schwingen, damit eine ganze Periode vergangen ist. Zwei Durchgänge durch die Mitte entsprechen deshalb nicht immer zwei vollständigen Schwingungen. Für eine Zeitmessung muss die Zählregel eindeutig festliegen. Werden viele Perioden gemeinsam gemessen und die Gesamtzeit durch ihre Anzahl geteilt, wird der Einfluss der Reaktionszeit kleiner. Im Höhenvergleich wird die sehr kleine Differenz der Perioden an zwei Stationen untersucht.

Potenz und Zehnerpotenz. Eine Potenz bezeichnet eine wiederholte Multiplikation. r^2 bedeutet r mal r , r^3 bedeutet r mal r mal r . Flächen wachsen bei ähnlicher Form mit dem Quadrat einer Länge, Volumina mit ihrer dritten Potenz. Zehnerpotenzen erlauben eine übersichtliche Schreibweise sehr großer und sehr kleiner Zahlen: 10^3 ist tausend, 10^6 eine Million und 10^{-3} ein Tausendstel. Ein Ausdruck wie $3,33 \cdot 10^{11}$

Pa bedeutet 333 Milliarden Pascal. Ein Exponent an einer Einheit gehört zur Einheit: cm^3 bezeichnet ein Volumen, keinen gewöhnlichen Längenwert.

PREM. Die Abkürzung steht für Preliminary Reference Earth Model, sinngemäß vorläufiges Referenzmodell der Erde. Es beschreibt unter anderem, wie sich Dichte und Eigenschaften seismischer Wellen mit dem Radius ändern. Das Modell verbindet mehrere Arten geophysikalischer Beobachtungen und enthält verschiedene Schichten. Im Buch dient seine Dichteverteilung als genauer dokumentierter Vergleich für den einfachen linearen Ansatz. PREM ist keine direkte Fotografie des Erdinneren, sondern eine wissenschaftlich begründete Modellbeschreibung. Seine Werte stellen räumlich gemittelte Verhältnisse dar; örtliche Besonderheiten werden dadurch nicht vollständig erfasst.

Radius und Tiefe. Der Radius r gibt den Abstand vom Erdmittelpunkt an. Die Tiefe gibt dagegen den Abstand unter der Oberfläche an. An der Oberfläche ist der Radius ungefähr gleich dem Erdradius R und die Tiefe null. Im Mittelpunkt ist der Radius null und die Tiefe gleich R . Im Kugelmodell hängen beide Angaben durch $\text{Tiefe} = R - r$ zusammen. Dieser Unterschied ist für das Lesen der Diagramme entscheidend. Beginnt eine waagerechte Achse beim Radius null, liegt dort das Zentrum. Beginnt sie bei der Tiefe null, liegt dort die Oberfläche.

Randbedingung. Eine Randbedingung legt fest, welchen Wert oder welches Verhalten eine Größe an der Grenze des betrachteten Bereichs haben soll. Eine mathematische Gleichung allein kann mehrere Lösungen zulassen; passende Randbedingungen wählen daraus die zum Problem gehörenden aus. Für die Modellkugel wird beispielsweise eine äußere Dichte vorgegeben. Der Druck wird an der Oberfläche auf null gesetzt, weil der kleine atmosphärische Beitrag gegenüber dem Druck im Erdinneren vernachlässigt wird. Diese Null bedeutet einen gewählten Bezugswert. Sie ist keine Behauptung, dass an der wirklichen Erdoberfläche überhaupt kein Druck vorhanden sei.

Referenzmodell. Ein Referenzmodell ist eine festgelegte Vergleichsbeschreibung. Es stellt gemeinsame Ausgangswerte und Annahmen bereit, damit Rechnungen und Beobachtungen nachvollziehbar miteinander verglichen werden können. Eine Abweichung vom Referenzmodell kann auf einen Messfehler, auf eine örtliche Besonderheit oder auf eine unzureichende Modellannahme hinweisen. Sie muss deshalb erklärt werden. Im Buch erfüllt PREM diese Vergleichsaufgabe. Auch ein gut etabliertes Referenzmodell besitzt Voraussetzungen und Grenzen. Seine Verwendung ersetzt nicht die Prüfung, ob die verglichenen Größen tatsächlich dasselbe bedeuten, beispielsweise Zentralkichte oder mittlere Kerndichte.

Schalentheorem. Dieses Ergebnis der Newtonschen Gravitation betrifft kugelsymmetrische Massenschalen. Außerhalb einer solchen Schale wirkt ihre gesamte Masse so, als wäre sie im Mittelpunkt konzentriert. Innerhalb einer vollständigen, kugelsymmetrischen Schale heben sich ihre Anziehungsbeiträge dagegen genau auf. Einzelne Schalenstücke ziehen weiterhin an, ihre Kräfte ergeben zusammen jedoch null. Dadurch hängt das Feld im Erdinneren nur von der innerhalb des betrachteten Radius eingeschlossenen Masse ab. Das Ergebnis setzt die entsprechende Symmetrie voraus. Bei einem einzelnen Berg oder einer unvollständigen Schale gilt diese Aufhebung nicht.

Schwerebeschleunigung. Die Schwerebeschleunigung g beschreibt die am Ort wirksame Beschleunigung des freien Falls, wenn Luftwiderstand vernachlässigt wird. Nahe der Erdoberfläche liegt sie ungefähr bei $9,8 \text{ m/s}^2$. Sie hängt unter anderem von Höhe, geographischer Breite, Erdrotation und örtlicher Massenverteilung ab. Ein Pendel reagiert auf diese örtliche Schwere. Im vereinfachten Modell einer ruhenden Kugel stimmt sie mit der allein aus der Massenanziehung berechneten Gravitationsbeschleunigung überein. Bei einer genauen realen Messung muss zwischen beiden Beschreibungen unterschieden werden. Insbesondere ist g keine überall gleiche Naturkonstante.

Seismische Wellen. Das sind mechanische Wellen, die sich durch den Erdkörper ausbreiten, beispielsweise nach einem Erdbeben. Kompressionswellen verdichten und entspannen das Material abwechselnd. Scherwellen verformen es seitlich. Laufzeiten, Ablenkungen und Reflexionen solcher Wellen geben Auskunft über die durchlaufenen Bereiche. Flüssigkeiten tragen keine gewöhnlichen elastischen Scherwellen wie feste Gesteine; dieses unterschiedliche Verhalten hilft, den flüssigen äußeren Kern zu erkennen. Seismische Beobachtungen liefern damit Informationen, die eine Messung von Erdmasse und Erdradius allein nicht bereitstellt. Ihre Auswertung erweitert den Schluss auf die innere Gliederung der Erde.

SI und Einheiten. SI bezeichnet das Internationale Einheitensystem. Es sorgt dafür, dass eine Größenangabe überall dieselbe Bedeutung hat. Im Buch werden vor allem Meter, Kilogramm und Sekunde sowie daraus zusammengesetzte Einheiten verwendet. Dichte wird beispielsweise in kg/m^3 , Beschleunigung in m/s^2 und Druck in Pascal angegeben. Im Steinversuch sind Gramm und Kubikzentimeter oft handlicher. Bei einer gemeinsamen Rechnung müssen die Einheiten zusammenpassen: 1 g/cm^3 entspricht 1.000 kg/m^3 . Eine Umrechnung verändert den Zahlenwert, aber nicht die physikalische Größe. Fehlende oder verwechselte Einheiten können dagegen das Ergebnis grundlegend verfälschen.

Standardunsicherheit. Die Standardunsicherheit ist ein bestimmtes Maß für die Unsicherheit eines Messwerts. Sie wird in der Form einer Standardabweichung angegeben und besitzt dieselbe Einheit wie die betreffende Größe. Vereinfacht beschreibt sie eine typische Breite der plausiblen Werte um den angegebenen Wert. Sie ist jedoch keine garantierte maximale Abweichung. Ihre genaue Bedeutung hängt von den verfügbaren Informationen und den verwendeten statistischen Annahmen ab. Werden mehrere unsichere Größen verrechnet, müssen ihre Beiträge passend kombiniert werden. Dabei ist auch zu prüfen, ob die Eingangsgrößen unabhängig sind oder gemeinsame Einflüsse besitzen.

Systematische und zufällige Abweichungen. Zufällige Einflüsse lassen Messwerte bei Wiederholungen streuen, etwa durch wechselnde Reaktionszeiten beim Stoppen. Eine systematische Abweichung verschiebt dagegen viele Ergebnisse in ähnlicher Weise, beispielsweise durch eine falsch eingestellte Waage. Mehr Messungen können die zufällige Streuung eines Mittelwerts vermindern. Eine gemeinsame falsche Einstellung wird dadurch nicht beseitigt. Im Pendelversuch kann eine langsame Temperaturänderung die wirksame Länge systematisch verändern. Kontrollmessungen, Kalibrierungen und unabhängige Verfahren sind deshalb ebenso wichtig wie eine große Zahl von Wiederholungen.

Trägheitsmoment. Das Trägheitsmoment beschreibt, wie stark sich ein Körper einer Änderung seiner Drehbewegung um eine bestimmte Achse widersetzt. Dabei zählt nicht nur die Gesamtmasse, sondern auch ihr Abstand von dieser Achse. Ein drehbarer Körper lässt sich bei gleicher Masse anders beschleunigen, wenn mehr Masse weit außen liegt. Ein vertrautes Beispiel ist eine drehende Person, deren Drehgeschwindigkeit sich beim Anziehen oder Ausstrecken der Arme verändert. Für die Erde liefert das Trägheitsmoment zusätzliche Information über die innere Massenverteilung. Der Vergleichswert $I/(MR^2)$ ist ohne Einheit und erlaubt den Vergleich unterschiedlich großer Körper.

Volumen und Wasserverdrängung. Das Volumen bezeichnet den Rauminhalt eines Körpers. Ein Kubikzentimeter ist der Rauminhalt eines Würfels mit einem Zentimeter Kantenlänge und entspricht einem Milliliter. Wird ein kompakter Stein vollständig untergetaucht, steigt der Wasserstand. Die Zunahme des vom Wasser und Stein gemeinsam beanspruchten Volumens liefert bei geeigneten Bedingungen das Steinvolumen. Entscheidend ist die Differenz zwischen beiden Ablesungen, nicht das gesamte Endvolumen. Anhaftende Luftblasen, verschüttetes Wasser oder das Eindringen von Wasser in offene Poren können die Auswertung verändern und müssen beim Versuch beachtet werden.

Wirksame Pendellänge. Für ein ideales Fadenpendel mit punktförmiger Masse ist die Länge der Abstand zwischen Aufhängung und Massepunkt. Ein realer Pendelkörper ist ausgedehnt, und auch die Aufhängung oder Stange kann Masse besitzen. Seine wirksame Pendellänge ist deshalb die Länge eines idealen Pendels mit derselben kleinen Schwingungsperiode bei derselben Schwere. Sie muss nicht mit der sichtbaren Faden- oder Stangenlänge übereinstimmen. Bei einer kleinen schweren Kugel am leichten Faden liegt der relevante Endpunkt näherungsweise im Kugelmittelpunkt. Für einen Höhenvergleich muss die wirksame Länge an beiden Stationen unverändert bleiben.

Zeitnachgang einer Pendeluhr. Läuft eine Uhr langsamer als eine Vergleichsuhr, zeigt sie nach einiger Zeit weniger verstrichene Zeit an. Diese angesammelte Differenz heißt Nachgang. Sie ist von der Periodendifferenz zu unterscheiden: Die Periodendifferenz betrifft eine einzige Schwingung, der Nachgang summiert den Effekt vieler Schwingungen. Im idealen Höhenversuch besitzt das obere Pendel eine etwas längere Periode. Eine unverändert eingestellte Pendeluhr geht dort daher nach. Reale Uhren können zusätzlich durch Temperatur, Reibung, Hemmung oder eine veränderte Aufstellung abweichen. Ein beobachteter Nachgang muss deshalb auf seine Ursachen untersucht werden.

Zentraldichte. Die Zentraldichte ist die Dichte unmittelbar am Mittelpunkt eines Erdmodells. Sie ist ein örtlicher Wert, kein Durchschnitt über den gesamten inneren Kern. Auch die mittlere Dichte der ganzen Erde ist eine andere Größe. Im linearen Ansatz folgt die Zentraldichte aus der gewählten Modellform, dem äußeren Dichtewert und der Gesamtmasse. Sie wird also nicht direkt am Stein gemessen. Der Vergleich mit PREM zeigt, ob ihre Größenordnung plausibel ist. Eine gute Übereinstimmung dieses einzelnen Werts beweist jedoch noch nicht, dass der gesamte berechnete Dichteverlauf richtig ist.

Formelzeichen lesen

Ein Formelzeichen vertritt eine physikalische Größe; es ist kein zusätzliches Fachwort. Runde Klammern zeigen häufig eine Abhängigkeit an: $\rho(r)$ bedeutet die Dichte an der Stelle mit dem Radius r . Die Zeichen ρ und π sind griechische Buchstaben und heißen Rho und Pi. Ein kleiner Index unterscheidet besondere Werte: Der Index c bezeichnet im Buch das Zentrum, der Index s den äußeren Rand. Ein Querstrich über ρ kennzeichnet den Mittelwert. Großes M steht für die gesamte Erdmasse, $m(r)$ für die bis zum Radius r eingeschlossene Masse.

Das Zeichen Δ , gesprochen Delta, kennzeichnet eine Differenz. Im Pendelvergleich ist ΔT ausdrücklich als obere Periode minus untere Periode festgelegt. Das Zeichen $\approx$ bedeutet näherungsweise gleich. Eine hochgestellte Zwei oder Drei bezeichnet eine Potenz; ein tiefgestelltes Zeichen kennzeichnet dagegen einen besonderen Wert und ist kein Multiplikationsfaktor. Die fortlaufenden Zahlen in runden Klammern am rechten Rand der abgesetzten Formeln sind Formelnummern. Sie dienen dem Auffinden und gehören nicht zur Rechnung.

Zeichen	Bedeutung	Einheit
r, s	Radius beziehungsweise Integrationsvariable	m
R	Äußerer Radius des Kugelmodells	m
h	Radialer Abstand der Pendelstationen	m
m, V	Masse und Volumen der Probe	kg, m ³
$M, m(r)$	Gesamtmasse und eingeschlossene Erdmasse	kg
ρ, ρ_s, ρ_c	Örtliche, äußere und zentrale Dichte	kg/m ³

Zeichen	Bedeutung	Einheit
$\bar{\rho}$	Über das Erdvolumen gemittelte Dichte	kg/m ³
a	Steigung der linearen Dichtefunktion	kg/m ⁴
G	Gravitationskonstante	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
g	Positiver Betrag der Beschleunigung	m/s ²
p, pc	Druck und Zentraldruck	Pa
l	Wirksame Pendellänge	m
T ₀ , T _h	Periode unten beziehungsweise oben	s
ΔT	T _h – T ₀	s
L, t	Uhrnachgang und verstrichene Zeit	s
I	Trägheitsmoment der Erde	kg m ²
u(x)	Standardunsicherheit einer Größe x	Einheit von x

Anhang E Abgleich mit dem Ausgangsmaterial

Zahlen und Schreibweisen

Der Vortrag und die Präsentation enthalten die experimentelle Grundlage und den linearen Modellansatz [1]. Die Buchrechnung vereinheitlicht die Einheiten und die Radiusnotation. Die Zahlen der Vorlage bleiben dadurch nachvollziehbar, während die Hauptrechnung ein konsistentes System von Eingangsgrößen verwendet.

Für die Wasserstandsablesungen sind 18,58 cm und 22,64 cm maßgeblich. Die Differenz beträgt 4,06 cm. Die stellenweise Angabe mm auf der Folie wird durch die Skala und die Volumenrechnung als Schreibfehler erkennbar. Die Dichte von 2,72 g/cm³ bleibt davon unberührt, wenn die konsistente Zentimeterrechnung verwendet wird.

Die innere Massenfunktion enthält den veränderlichen Radius r. Der in der Folienformel auftretende Großbuchstabe R³ innerhalb einer sonst r-abhängigen Funktion wird zu r³ berichtigt. Im gesprochenen Vortrag wird bereits auf eine Unstimmigkeit der Variablenbezeichnung aufmerksam gemacht. Für Integrationen verwendet die Buchfassung bei Bedarf eine eigene Laufvariable s.

Die Vorlage benutzt unter anderem $R = 6,369 \cdot 10^6$ m, $M = 5,963351108 \cdot 10^{24}$ kg und $G = 6,673 \cdot 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻². Daraus entstehen die dort angegebenen Zentralwerte von rund 13,88 g/cm³ und 332,5 GPa. Die Hauptrechnung verwendet die in Anhang B festgelegten Werte und liefert rund 13,89 g/cm³ und 333,3 GPa.

Pendel und Vergleichswerte

Die Periodendifferenz wird im Buch als obere minus untere Periode definiert. Sie ist positiv. Die im Ausgangsmaterial aufgeführten negativen Periodendifferenzen und die Beobachtungsdauern von 4 Stunden 22 Minuten beziehungsweise 1 Stunde 27 Minuten werden nicht übernommen. Die aus den

Gleichungen neu abgeleiteten Werte stehen in Kapitel 10. Periodenänderung und angesammelter Uhrnachgang sind dort ausdrücklich getrennt.

Ein Zentralwert von rund $13,1 \text{ g/cm}^3$ ist im PREM-Vergleich von einem Mittelwert über den gesamten inneren Kern zu unterscheiden. Das lineare Ergebnis liegt gut sechs Prozent über diesem Zentralwert. Der Druckvergleich ergibt eine Abweichung von rund achteinhalb Prozent. Damit wird die im Vortrag hervorgehobene Nähe quantitativ eingeordnet.

Die zusätzlichen Schichtendiagramme der Präsentation

Die letzten beiden Folien enthalten ein gegliedertes Dichteprofil und einen Druckverlauf. Die eingebetteten Diagrammdaten beginnen nahe dem Zentrum bei etwa $13,56 \text{ g/cm}^3$ beziehungsweise $356,25 \text{ GPa}$. Sie unterscheiden sich von den im Buch verwendeten PREM-Werten. Die betreffenden Folien weisen keine hinreichende Quellen- und Parameterbeschreibung aus, um diese Kurven als PREM zu identifizieren.

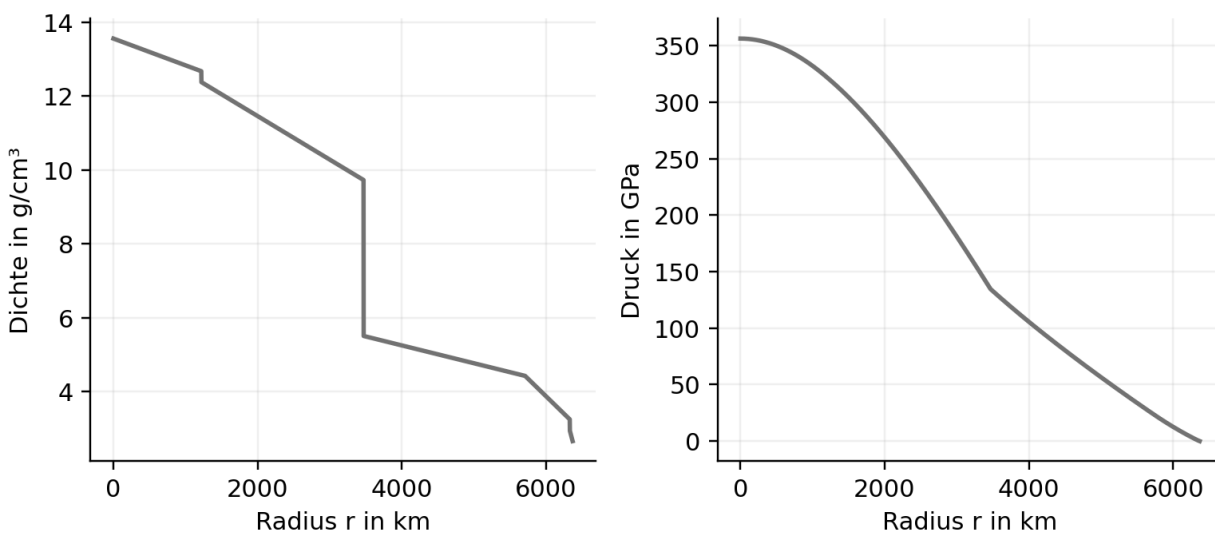


Abbildung 11 Neu gezeichnete Kurven aus den eingebetteten Daten der letzten beiden Präsentationsfolien. Dargestellt ist das dort enthaltene Schichtenmodell. Es wird wegen fehlender eindeutiger Modellangaben getrennt vom PREM-Vergleich behandelt.

Die Kurven dokumentieren den Übergang vom linearen Ansatz zu einer geschichteten Beschreibung. Ihre Wiedergabe bewahrt diesen Bestandteil des Ausgangsmaterials. Für den quantitativ reproduzierbaren Referenzvergleich im Haupttext werden dagegen die ausdrücklich benannten stückweisen PREM-Funktionen verwendet.

Quellen und Literatur

Die Quellenangaben beziehen sich auf die im Text markierten fachlichen oder numerischen Grundlagen. Die Herleitungen, Beispielrechnungen und neu gezeichneten Diagramme sind anhand der jeweils angegebenen Annahmen reproduzierbar. Onlinequellen wurden am 13. Oktober 2026 abgerufen.

[1] Retzlaff, Klaus. Ein Wunder mathematischer Physik – Wie man mit Hausmitteln das Erdinnere ausmisst. Bereitgestellte PowerPoint-Präsentation mit 13 Folien und zugehöriger Videovortrag von rund 13 Minuten 8 Sekunden. Primärmaterial für Versuch, Fotos, Modellansatz und gedanklichen Aufbau. Die Buchfassung berücksichtigt sowohl die Folien einschließlich Formeln und eingebetteter Diagrammdaten als auch die gesprochenen Erläuterungen.

- [2] NASA Goddard Space Flight Center, National Space Science Data Center. Earth Fact Sheet. Zusammenstellung von Erdmasse, mittlerem Radius, mittlerer Dichte und Trägheitsfaktor. Stand der Seite 15. November 2024.
<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [3] NIST und CODATA. Fundamental Physical Constants – Extensive Listing, 2022 CODATA adjustment. Verwendeter Wert der Newtonschen Gravitationskonstante $G = 6,67430(15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Die Klammer gibt die Standardunsicherheit der letzten Stellen an.
<https://physics.nist.gov/cuu/pdf/all.pdf>
- [4] Dziewonski, Adam M., und Anderson, Don L. Preliminary reference Earth model. Physics of the Earth and Planetary Interiors 25, 297–356, 1981. DOI 10.1016/0031-9201(81)90046-7. Originalpublikation des PREM-Modells. Bibliographischer Nachweis und Zusammenfassung im Repositorium des California Institute of Technology.
<https://authors.library.caltech.edu/records/rjkzg-1a346>
- [5] Petcov, S. T. Neutrino tomography of the earth: the earth total mass, moment of inertia and hydrostatic equilibrium constraints. European Physical Journal C 84, Artikel 991, 2024. DOI 10.1140/epjc/s10052-024-13348-7. Verwendet werden insbesondere die wiedergegebenen PREM-Dichtefunktionen in den Gleichungen 9–13. Aus diesen Funktionen wurden Masse, Trägheitsmoment und hydrostatischer Druck für den Vergleich eigenständig berechnet.
<https://link.springer.com/article/10.1140/epjc/s10052-024-13348-7>
- [6] U.S. Geological Survey. The Interior of the Earth; ergänzend The Science of Earthquakes. Institutionelle Erläuterungen zur Erdgliederung und zum Informationsgehalt seismischer Wellen.
<https://pubs.usgs.gov/gip/interior/index.html>
<https://www.usgs.gov/programs/earthquake-hazards/science-earthquakes>
- [7] U.S. Geological Survey. Open-File Report 02-353, Explanation of the gravity method and depth to basement computation. Übersicht über Gezeiten-, Instrumenten-, Breiten-, Höhen-, Bouguer- und Geländekorrekturen. Ergänzend Techniques of Water-Resources Investigations, Book 2, Chapter D1, Gravimetry.
<https://pubs.usgs.gov/of/2002/0353/method.html>
https://pubs.usgs.gov/twri/twri2-d1/pdf/twri_2-D1_d.pdf
- [8] OpenStax, Rice University. University Physics Volume 1, Abschnitt 15.4 Pendulums. Mathematisches und physikalisches Pendel sowie die Voraussetzungen der Kleinwinkelnäherung.
<https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums>

Rechenkonventionen

Die Hauptrechnung verwendet Newtonsche Gravitation, eine nicht rotierende Kugel, positive Beträge der Gravitationsbeschleunigung und $p(R) = 0$. Der Druckvergleich mit PREM wurde aus dessen Dichtefunktionen integriert. Die resultierende PREM-Gesamtmasse von etwa $5,97318 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ weicht aufgrund der verwendeten Koeffizienten geringfügig von der angesetzten Hauptrechnungsmasse ab. Sie wurde nicht nachträglich auf deren Wert normiert.

Die Originalfotos des Messversuchs stammen aus [1]. Alle wissenschaftlichen Zeichnungen und Kurvendarstellungen der Buchfassung wurden neu aufgebaut. Rechenbeispiele mit angenommenen Messwerten oder Unsicherheiten sind im Text als solche ausgewiesen.