

Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Projektidee: Mittels der Uhr Otto von Guericques werden der Erdradius, die Erdmasse sowie die mittlere Dichte der Erde ermittelt. In einem evakuierten Behälter wird die vom Magdeburger Uhrmachermeister Herrn Joachim Hoppe rekonstruierte und funktionsfähige Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird der Takt der Uhr über einen Zeitraum von einem Monat am Fuß des Magdeburger Doms gemessen und die Gesamtdauer für eine vorgegebene Taktanzahl ermittelt. Eine zweite Messung erfolgt analog an der höchstmöglichen Stelle des Doms. Die Temperatur wird in beiden Experimenten konstant gehalten, um thermische Einflüsse auf die Pendellänge auszuschalten. Nach Bekanntgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Alternativ ist es aber auch möglich, zuerst die Übergabe durchzuführen und dann, ebenfalls öffentlichkeitswirksam, das Experiment durchzuführen. Das Projekt hat einen doppelten Otto-von-Guericke-Bezug von planetarischer Dimension und ist demnach als schönes Gemeinschaftsprojekt zwischen der Otto-von-Guericke-Gesellschaft, der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg und der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg geeignet. Zugleich dient dieses Experiment dazu, andere Menschen für die Physik zu begeistern.

0. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen sind in [1] dargestellt. Die Otto-von-Guericke-Uhr wird als Pendel betrachtet, es gilt die Gleichung für die Fallbeschleunigung g :

$$g = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2} \quad (1),$$

unter der Annahme kleiner Pendelausschläge. In (1) gehen die Pendellänge l und die Periodendauer τ ein. Um periodische und aperiodische Fehler herauszumitteln, erfolgt die Messung über eine hinreichend große Anzahl von Takten k . Der Zusammenhang zwischen Taktzahl, Periodendauer und Messzeit T ist:

$$\tau = \frac{T}{k} \quad (2).$$

Durch Einsetzen in (1) folgt:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T^2} \quad (3).$$

Physikalisch ist g vom Abstand zum Erdmittelpunkt und von der Erdmasse abhängig. Da diese beiden Größen bestimmt werden sollen, sind zwei Gleichungen für diese beiden als unbekannt angenommenen Größen erforderlich. Diese beiden unabhängigen Gleichungen gewinnt man, wenn zwei Messungen in unterschiedlichem Abstand vom

Erdmittelpunkt unter Nutzung der Beziehung (1) durchgeführt werden. Mittels des Newtonschen Gravitationsgesetzes ergibt sich für den Radius der Erde:

$$R = h \frac{\tau_0}{\Delta \tau} = h \frac{T_0}{\Delta T} \quad (4),$$

für die Erdmasse:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta \tau} \right)^2 = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot k}{\Delta T} \right)^2 \quad (5)$$

und für die mittlere Dichte der Erde:

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{\Delta \tau}{\tau_0^3} = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{k^2}{T^2} \frac{\Delta T}{T_0} \quad (6).$$

Darin sind:

Gravitationskonstante: f

Höhenunterschied: h

Differenz der Messgrößen Δ

Die Genauigkeit sowie der Erfolg des Experiments hängen von der Genauigkeit der Bestimmung der Fallbeschleunigungen an den beiden Messorten ab. Unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungs-gesetzes

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \delta T + \delta \left| \frac{\partial g}{\partial k} \right| \delta k \quad (7)$$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

finden wir für den Fehler der Messung:

$$\delta g = 4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T^2} \delta l + 4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T^2} \frac{\delta T}{T} \quad (8).$$

Wegen des Zusammenhangs (2), aber auch weil k eine festgelegte natürliche Zahl ist, kann $\delta k = 0$ gesetzt werden. k wird durch ein Zählwerk eindeutig und fehlerfrei bestimmt.

Die Betrachtung von (8) zeigt, dass der zweite Term aufgrund von $\frac{\delta T}{T}$ beliebig klein wird,

wenn lediglich die Messung hinreichend lange durchgeführt wird. Demgegenüber wäre ein Fehler in der Pendellänge von systematischer Natur. Wegen der Kleinheit des zu erwartenden Effekts kann an diesem Fehler das Experiment scheitern. Deshalb muss die Pendellänge sehr genau bestimmt werden. In diesem Zusammenhang geht es nicht um eine genaue Längenmessung. Die Pendellänge ist hierbei als effektive Pendellänge dynamisch zu bestimmen, die die Schwingungseigenschaften des Uhrenpendels festlegt.

1. Bestimmung der Pendellänge

Die Ungenauigkeit der Pendellänge der Uhr ist die kritische Größe für das Experiment. Demnach ist es nötig, diese mit sehr hoher Genauigkeit zu bestimmen. Dies kann durch ein äußerst genaues supraleitendes Gravimeter ermöglicht werden, mit dem die Fallbeschleunigung am unteren Messort bestimmt wird. Wir bezeichnen die so „exakt“ ermittelte Fallbeschleunigung mit $\hat{g}$. Da die erste Messung über die Zeit T_0 (ca. ein Monat) durchgeführt wird, kann diese Zeit benutzt werden, um die Pendellänge zu bestimmen:

$$l = \frac{\hat{g}}{4 \cdot \pi^2} \frac{T_0^2}{k^2} \quad (9)$$

Der Fehler der Pendellänge ist demnach:

$$\delta l = \frac{T_0^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta \hat{g} + \frac{\hat{g} \cdot T_0}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta T_0 \quad (10).$$

Es muss zudem ermittelt werden, welche Genauigkeiten für $\hat{g}$ und T_0 erreicht werden können.

2. Der Gangunterschied

Der Gangunterschied über k Takte ergibt sich aus

$$\Delta T = T_h - T_0 = k \cdot \Delta \tau \quad (11)$$

mit

$$\Delta \tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \quad (12).$$

Die Indizes bezeichnen den Messort, das heißt $g_0 = g(R)$ und $g_h = g(R+h)$, wobei R für den Erdradius am Boden des Magdeburger Doms steht. Es wird hierbei näherungsweise angenommen, dass diese Höhe am Fuß des Doms ungefähr dem durchschnittlichen Erdradius entspricht. Für den Fehler des Gangunterschieds finden wir:

$$\begin{aligned} \delta \Delta T = k \left(\frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_h}} - \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_0}} \right) \delta l + \\ + \frac{\pi \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}} \delta g_h + \frac{\pi \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}} \delta g_0 \end{aligned} \quad (13).$$

3. Der Erdradius

Der Erdradius kann mithilfe der Beziehung (4) bestimmt werden. Es folgt der Fehler:

$$\delta R = \frac{h}{\Delta T} \delta T_0 + \frac{h \cdot T_0}{\Delta T^2} \delta \Delta T + \frac{T_0}{\Delta T} \delta h \quad (14).$$

4. Die Erdmasse

Unter Zugrundelegung von (5) ergibt sich die Fehlerabschätzung zu:

$$\begin{aligned} \delta M = \frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h^2 \cdot k^2}{\Delta T^3} \delta \Delta T + \\ + \frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h \cdot k^2}{\Delta T^2} \delta h \end{aligned} \quad (15).$$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto
von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

5. Die mittlere Dichte der Erde

Für den Fehler der Messung der mittleren Dichte der Erde folgt unter Verwendung von (6) schließlich:

$$\begin{aligned} \delta\rho = & \frac{3 \cdot \pi \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta l + \\ & + \frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h^2 \cdot T_0^4} \delta h + \\ & + \frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta \Delta T + \\ & + \frac{9 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^4} \delta T_0 \end{aligned} \quad (16).$$

6. Fehlersimulation

Die folgende Computersimulation untersucht die zu erwartenden Effekte sowie die Auswirkungen der einzelnen Fehler auf die gesuchten Ergebnisse. Für die Analyse ist die Betrachtung der Einzelterme von Interesse. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Übersicht über die Terme in Tabelle 2 angegeben. Tabelle 1 zeigt dagegen die Zuordnung der Terme zu den interessierenden Größen.

Tabelle 1: Zuordnung der Terme zu den Fehlern der Fallbeschleunigung, des Gangunterschieds, des Erdradius, der Erdmasse sowie der mittleren Erddichte.

$\delta g_0 = E_0 + E_1$
$\delta g_h = E_2 + E_3$
$\delta \Delta T = E_4 + E_5 + E_6$
$\delta R = E_7 + E_8 + E_9$
$\delta M = E_{10} + E_{11}$
$\delta \rho = E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{15}$

Tabelle 2: Übersicht über die Einzelterme.

Termbezeichnung in der Simulation	Term
E_0	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T_0^2} \delta l$
E_1	$4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T_0^2} \frac{\delta T}{T_0}$
E_2	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T_h^2} \delta l$
E_3	$4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T_h^2} \frac{\delta T}{T_h}$
E_4	$k \left(\frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_h}} - \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_0}} \right) \delta l$
E_5	$\frac{\pi \cdot k \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}} \delta g_h$
E_6	$\frac{\pi \cdot k \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}} \delta g_0$
E_7	$\frac{h}{\Delta T} \delta T_0$
E_8	$\frac{h \cdot T_0}{\Delta T^2} \delta \Delta T$
E_9	$\frac{T_0}{\Delta T} \delta h$
E_{10}	$\frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h^2 \cdot k^2}{\Delta T^3} \delta \Delta T$
E_{11}	$\frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h \cdot k^2}{\Delta T^2} \delta h$
E_{12}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta l$
E_{13}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h^2 \cdot T_0^4} \delta h$
E_{14}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta \Delta T$
E_{15}	$\frac{9 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^4} \delta T_0$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto
von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Tabelle 3 ergänzt die Auflistung um die Fehlerterme für die Pendellänge gemäß der Beziehung (10).

Tabelle 3: Die Genauigkeit der Pendellänge ist die Crux des Experiments. Die Tabelle gibt die Fehlerterme an.

E_{16}	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T^2} \delta l$
E_{17}	$\frac{\hat{g} \cdot T_0}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta T_0$
Fehler Pendellänge	$\delta l = E_{16} + E_{17}$

Erste vorläufige Ergebnisse der Fehlersimulation

Die ersten Ergebnisse einer Simulation für bestimmte festgelegte Annahmen über die Genauigkeit der Messgrößen sowie die vorausgesetzten geophysikalischen Parameter sind in der folgenden Liste des Computerausdrucks angegeben. Diese Liste enthält die Computernomenklatur.

Liste 1: Computerausdruck der Simulation, in dieser Liste bedeutet $o = \delta$ und $D = \Delta$. Die Bedeutung der übrigen Größen ist selbsterklärend.

M = 5.979000000000000E+0024 kg
R = 6.370000000000000E+0006 m
f = 6.670000000000000E-0011 N m² / kg²
Error T = 0.01 s
Error g = 0.000001 m/s²
Error h = 0.001 m
h = 70.0 m
l = 0.14 m
Zeit = 1.0 Monate
Roh = 5.52232099390985E+0003 kg/m³
Roh = 5.52232099390985E+0000 g/cm³
g0 = 9.82823478383021E+0000 m/s²
gh = 9.82801878223060E+0000 m/s²
gh-g0 = -2.16001599611732E-0004 m/s²
tau0 = 7.49904785180876E-0001 s
tauh = 7.49913025892801E-0001 s

Dtau = 8.24071192506460E-0006 s
k = 3.45643880559425E+0006 Takte
T0 = 2.592000000000000E+0006 s
Th = 2.59202848351648E+0006 s
DT = 2.84835164835167E+0001 s
Error l = 1.53249208636097E-0008 m
Error g0 = 1.11375271740544E-0006 m/²
Error gh = 1.11372782306434E-0006 m/²
Error DT = 2.93733081329375E-0001 s
Error R = 6.57809378681311E+0004 m
Error M = 8.82045482341191E+0023 kg
Error Roh = 5.69489866916968E+01 kg/m³
Term E 0 = 0.000010946 %
Term E 1 = 0.000000386 %
Term E 2 = 0.000010946 %
Term E 3 = 0.000000386 %
Term E 4 = 0.000005473 %
Term E 5 = 0.515619414 %
Term E 6 = 0.515613940 %
Term E 7 = 0.000000386 %
Term E 8 = 1.031238827 %
Term E 9 = 0.001428571 %
Term E 10 = 14.731983246 %
Term E 11 = 0.020408163 %
Term E 12 = 0.000010946 %
Term E 13 = 0.000000000 %
Term E 14 = 1.031238827 %
Term E 15 = 0.000001157 %
Term E 16 = 0.000010175 %
Term E 17 = 0.000000772 %

Die Ergebnisse sind aus zwei Gründen vorläufig: 1. Die Formeln und das Computerprogramm sind noch nicht vollständig auf Richtigkeit geprüft. 2. Unklarheit herrscht im Augenblick über die zugrunde gelegten Inputgrößen, insbesondere über die Genauigkeit, mit der g für die Eichung bestimmbar ist.

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, „Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet“, Astronomische Gesellschaft Magdeburg, 03/2013