

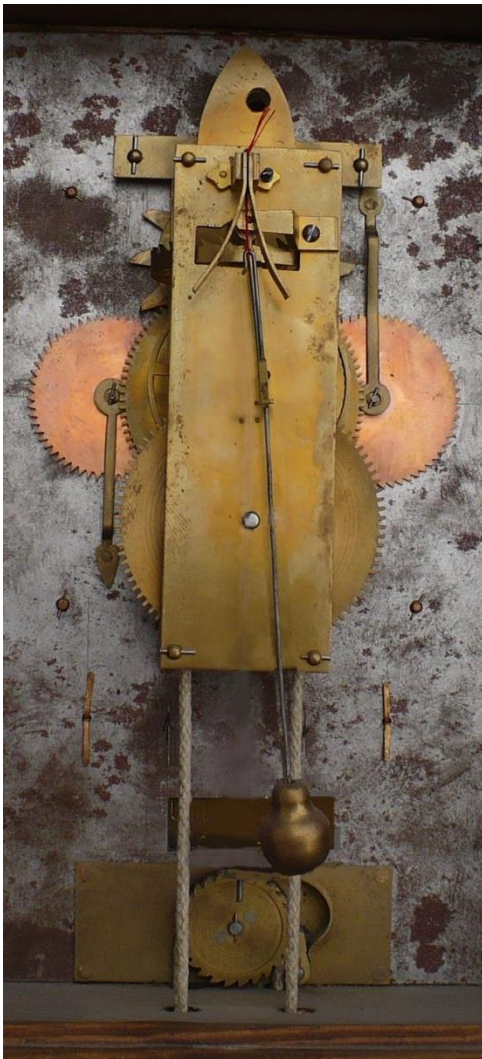
Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Anlass für diese kleine physikalische Abhandlung ist die Bemerkung des Uhrmachermeisters Joachim Hoppe, dass die Uhrmacher früher versuchten, die Uhr durch eine Veränderung der Pendelmasse zu eichen, aber dann waren sie darüber sehr verwundert, dass der Uhrengang nicht von der Pendelmasse, sondern von der Pendellänge abhängig war. Wie das kommt und was das mit fundamentaler Gravitationsphysik zu tun hat, darüber wird hier berichtet. Doch die Gleichungen geben Anlass für einen Blick darüber hinaus und lassen uns staunen ...

* * *

Zusammenfassung: Einerseits ist eine Pendeluhr ein simples Instrument zur Zeitmessung, andererseits ist sie auch ein Gravimeter. Es wird nicht nur gezeigt, welche Rolle fundamentale physikalische Prinzipien in der Pendeluhr spielen, sondern auch, wie es gelingt, mittels einer Pendeluhr die Masse der Erde, die Fallbeschleunigung und schließlich sogar den Erdradius und damit die mittlere Dichte der Erde zu messen.



**Die faszinierende Pendeluhr
Otto von Guericke's**

Die Pendeluhr beschreiben wir im Rahmen des Formalismus von Lagrange. In einem kartesischen Koordinatensystem, das sich an der Oberfläche der Erde befindet, sodass die x-Koordinatenachse eine Tangente zur Erdoberfläche im Abstand R vom Erdmittelpunkt bildet und die y-Achse die Höhe über dem Abstand R beschreibt, ergeben sich für die Position der Pendelmasse die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin \alpha \\ y &= l \cdot (1 - \cos \alpha) \end{aligned} \quad (1).$$

Dabei ist der Winkel α die Auslenkung des Pendels und l ist die Pendellänge.

Die Lagrange-Funktion ist die Differenz zwischen der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie U :

$$L = T - U \quad (2).$$

Gehen wir davon aus, dass die Pendellänge klein gegenüber dem Abstand zum Erdmittelpunkt ist, das heißt, dass $l \ll R$ gilt, kann das Gravitationsfeld im Bereich der Pendellänge als konstant angesehen werden. In diesem Bereich ist demnach die zum Erdmittelpunkt gerichtete Fallbeschleunigung:

$$g = f \frac{M}{R^2} \quad (3).$$

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Die Größe f ist die Newtonsche Gravitationskonstante und M bezeichnet die aktive schwere Masse der Erde, die das Erdgravitationsfeld erzeugt. Für die Lagrange-Funktion (2) ergibt sich durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke:

$$L = m_T \frac{v^2}{2} - m_s \cdot g \cdot y \quad (4).$$

In der Beziehung (4) ist m_T die träge Pendelmasse, v^2 das Quadrat der Geschwindigkeit und m_s die passive schwere Pendelmasse.

Diese Begriffe, *träge Masse*, *passive schwere Masse* und *aktive schwere Masse*, sind für uns von Bedeutung. Die träge Masse ist jene, die für den Widerstand gegen eine Änderung des Bewegungszustands zuständig ist und die wir aus dem zweiten Newtonschen Axiom

$$\vec{F} = m_T \cdot \vec{a} \quad (5)$$

kennen. Die passive schwere Masse bezeichnet die Eigenschaft eines Körpers, auf ein gegebenes Gravitationsfeld $\vec{g}$ zu reagieren:

$$\vec{F}_g = m_s \cdot \vec{g} \quad (6).$$

Die Beziehung (6) beschreibt die Gravitationskraft. Man mag anmerken, dass sowohl (5) als auch (6) das zweite Newtonsche Axiom repräsentieren, weil $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist und demzufolge $m_T = m_s$ trivial gelten müsste, wobei diese Gleichheit kein fundamentales Prinzip ist. Doch man bedenke, dass die Kraft $\vec{F}_g$ bei einem im Gravitationsfeld ruhenden Objekt gemessen wird. Demnach repräsentiert $\vec{g}$ das Gravitationsfeld und ist zugleich die Fallbeschleunigung für ein Teilchen, das sich frei bewegen kann. Dieses frei bewegte

Teilchen, „spürt“ aber gerade nicht die Kraft $\vec{F}_g$, weil diese Kraft exakt durch die Trägheitskraft $\vec{F}$ ausgeglichen wird. Dieser Ausgleich ist nicht trivial, aber typisch für die Gravitation. In einem Coulomb-Feld verhält es sich nicht so. Schließlich ist die Größe $\vec{g}$ die Feldstärke der Gravitation:

$$\vec{g} = -f \frac{M}{R^3} \vec{R} \quad (7).$$

In (7) geht die *aktive schwere Masse*, also die Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, ein. (7) gilt als vektorielle Schreibweise der Beziehung (3), wobei der Vektor $\vec{R}$ vom Massenmittelpunkt der Erdmasse M ausgeht. Wir sehen an dieser Stelle demnach, dass in der Newtonschen Physik Massen in völlig unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen vorkommen. Für das Quadrat der Geschwindigkeit können wir unter Anwendung des Satzes von Pythagoras auch schreiben:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (8).$$

Hierbei bedeuten die Punkte über den Buchstaben die zeitliche Ableitung, das heißt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = v_x \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = v_y \end{aligned} \quad (9).$$

(9) gibt die x- und y-Komponente der Geschwindigkeit an.

Um die endgültige Form der Lagrange-Funktion zu finden, müssen wir demzufolge noch die Zeitableitung der Beziehung (1) bilden, um diese anschließend in (4) einzusetzen. Das wollen wir tun:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = l \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \\ v_y &= \dot{y} = l \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (10).$$

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Nun setzen wir (1) und (10) in die Lagrange-Funktion (4) ein und erhalten folglich:

$$L = m_T \frac{1}{2} (l^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + l^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \dot{\alpha}^2) - m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Umgeformt ergibt das:

$$L = m_T \frac{1}{2} l^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Weil immer $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gilt, folgt endgültig:

$$L = m_T \frac{l^2 \cdot \dot{\alpha}^2}{2} - m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (11).$$

Mit Ausnahme der Anfangsbedingungen enthält die Lagrange-Funktion (11) sämtliche Informationen über die Pendelbewegung.

Aus der Lagrange-Funktion kann somit die Bewegungsgleichung abgeleitet werden. Die Bewegungsgleichung ist die sogenannte Lagrange-Gleichung. Im Allgemeinen handelt es sich um ein System von Gleichungen, in unserem Fall reduziert sich das Problem auf eine einzige Differentialgleichung für den Winkel $\alpha(t)$. Unsere Schreibweise „ $\alpha(t)$ “ verrät, dass wir das zeitliche Verhalten des Winkels beschreiben wollen, das heißt die Pendelbewegung.

Die Lagrange-Gleichung lautet:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (12).$$

Wir müssen demnach die einzelnen Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_T \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (13).$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -m_s \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (14)$$

Setzen wir (13) und (14) in (12) ein, ergibt sich:

$$m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} + m_s \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = 0 \quad (15).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung beschreibt das zeitliche Verhalten des Winkels $\alpha = \alpha(t)$.

Leider handelt es sich hierbei nicht um eine lineare Differentialgleichung, weshalb die Lösung schwierig ist. Aber für kleine Auslenkungen $\alpha \approx 0$ gilt: $\sin \alpha \approx \alpha$. Demnach lautet die Differentialgleichung:

$$m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} + m_s \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0 \quad (16).$$

Das ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung und ihre Lösung stellt kein Problem dar.

Formen wir sie zunächst geringfügig um:

$$\ddot{\alpha} + \frac{m_s \cdot g}{m_T \cdot l} \alpha = 0 \quad (17).$$

Anschließend erkennen wir, dass sie eine Sinusschwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{m_s \cdot g}{m_T \cdot l}} \quad (18)$$

beschreibt, denn mit (18) wird (17) zu:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0 \quad (19).$$

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Betrachtet man nun (19), überzeugt man sich leicht, dass

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega \cdot t) \quad (20)$$

eine Lösung von (19) darstellt, da gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \omega \\ \ddot{\alpha} &= -\alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega^2 \end{aligned} \quad (21).$$

Setzt man (21) in (19) ein, ergibt sich:

$$-\alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega^2 + \omega^2 \cdot \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \equiv 0$$

Die Lösung (20) beschreibt demzufolge tatsächlich das zeitliche Verhalten der Auslenkung und es handelt sich um eine Sinusschwingung. Dabei bezeichnet α_0 die Amplitude.

Weil die Schwingungsdauer mit der Frequenz zusammenhängt, gilt:

$$\tau = 2 \cdot \pi \frac{1}{\omega} \quad (22).$$

Durch Einsetzen von (18) folgt die Schwingungsdauer:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_T \cdot l}{m_s \cdot g}} \quad (23).$$

Das ist die Gleichung, die für unsere Diskussion von entscheidender Bedeutung ist und die die Uhrmacherkunst des Baus von Pendeluhr in Beziehung zur Gravitationsphysik setzt.

Wir hatten gesehen, dass in der Newtonschen Physik Massen in völlig unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen vorkommen. Diese Massen sind unterschiedlich definiert und erfüllen entsprechend verschiedener physikalischer Funktionen. In der Gleichung (23) kommen die Massen in allen diesen unterschiedlichen Funktionen gleichzeitig

vor. Wir finden die *träge*, die *passive schwere* sowie die *aktive schwere Masse* in ihr. Dabei ist die aktive schwere Masse wegen (3) bzw. wegen (7) in g versteckt, das heißt $g = g(M)$.

Aufgrund ihrer unterschiedlichen Funktionen wäre die Annahme gerechtfertigt, dass diese verschiedenen Massenarten nichts miteinander zu tun haben könnten und dass sie in unterschiedlichen Stoffen in verschiedenen Verhältnissen vorkämen. In diesem Fall würden bei einer gegebenen schweren Masse m_s unterschiedliche Periodendauern für verschiedene Stoffe resultieren – je nachdem wie viel träge Masse der Körper enthalten würde.

Wenn jedoch für alle Stoffe stets

$$m_s = m_T \quad (24)$$

gilt, kürzen sich die träge sowie die passive schwere Masse aus der Beziehung (23) unter allen Bedingungen heraus und es gilt:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (25).$$

Unter der Bedingung (24) ist die Periodendauer der Pendelschwingung nicht von der Pendelmasse, sondern lediglich von der Pendellänge und der Stärke des Gravitationsfeldes abhängig. Im freien Fall oder bei einem verschwindenden Gravitationsfeld bleibt die Pendeluhr stehen, denn für $g \rightarrow 0$ folgt $\tau \rightarrow \infty$.

Was demzufolge die Uhrmacher verwunderte, war die Gültigkeit des in (24) zum Ausdruck kommenden sogenannten *schwachen Äquivalenzprinzips* von Trägheit und passiver Schwere. Dieses Prinzip ist der Grund dafür, dass unter Vakuumbedingungen sämtliche Körper unabhängig von ihrer Masse zu jedem Zeitpunkt gleich schnell fallen, wenn ihre Anfangsbedingungen identisch waren.

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Dieses Prinzip hat Einstein auf die Idee der Geometrisierung der Gravitation gebracht und es gilt heute als wichtiges Fundament der Gravitationsphysik – das konnten die verwunderten Uhrmacher zu ihrer Zeit allerdings noch nicht ahnen.

Da wir von der Gültigkeit des Äquivalenzprinzips überzeugt sind, können wir uns in den weiteren Betrachtungen auf die Beziehung (25) stützen. Weil wir die Periodendauer τ messen können und die Länge l des Pendels kennen, können wir eine Pendeluhr auch als Gravimeter verwenden. Dazu muss lediglich die Gleichung (25) nach g umgestellt werden

$$g = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2} \quad (26)$$

und die Uhr relativ zur Gravitationsquelle ruhen. Mittels (26) ist es möglich, durch Messung der Periodendauer das Gravitationsfeld zu vermessen.

Kennen wir das Gravitationsfeld, die Gravitationskonstante sowie den Erdradius, können wir eine Pendeluhr auch prinzipiell zur Vermessung der Erdmasse verwenden. Dazu müssen wir lediglich (3) nach der Masse M umstellen:

$$M = \frac{R^2}{f} \cdot g \quad (27).$$

Nach Einsetzen von (26) in (27) finden wir:

$$M = \frac{R^2}{f} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{\tau^2} \quad (28).$$

Was man mit einer Pendeluhr so alles machen kann!

Aber man kann noch mehr, zum Beispiel die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen. Glaubt ihr nicht? Das ist ganz einfach! Nehmen wir an, wir haben am Fuße des Magdeburger Doms eine

Fallbeschleunigung $g_0 = g(R)$ und auf der höchstmöglichen Position im Dom die Fallbeschleunigung $g_h = g(R+h)$, wobei h den Höhenunterschied bezeichnet, dann bewirken die unterschiedlichen Fallbeschleunigungen einen Gangunterschied $\Delta\tau$, das heißt, es gilt:

$$\Delta\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \quad (29).$$

Zur Herleitung dieser Beziehung haben wir (25) verwendet. Um nun die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen zu können, müssen wir das Gravitationsgesetz verwenden:

$$\begin{aligned} g_0 &= f \frac{M}{R^2} \\ g_h &= f \frac{M}{(R+h)^2} \end{aligned} \quad (30).$$

Die Beziehungen (30) setzen wir in (29) ein und formen nach der gesuchten Turmhöhe um. Wir erhalten:

$$h = \sqrt{f \frac{M}{l} \frac{\Delta\tau}{2 \cdot \pi}} \quad (31).$$

Messen wir den Unterschied der Periodendauer $\Delta\tau$ der Schwingungen, können wir bei Kenntnis der Erdmasse die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen, oder bei Kenntnis der Höhe die Erdmasse – ohne den Erdradius zu kennen!

Das liegt daran, dass sich bei der Herleitung der Beziehung (31) alle Terme wegheben, in denen der Erdradius auftaucht, und dieser bemerkenswerte Umstand verschafft uns jetzt völlig neue Möglichkeiten. Statt (31) zu benutzen, um die Turmhöhe zu bestimmen, sollten wir (31) nach der Erdmasse umstellen und die bekannte Turmhöhe benutzen, um mittels der

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Pendeluhr die Masse der Erde auszurechnen:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta \tau} \right)^2 \quad (32).$$

Wenn wir in dieser Form glücklich die Masse der Erde bestimmt haben, können wir (26) verwenden, um die Fallbeschleunigung am Fuße des Turms zu bestimmen. Denn kennen wir diese Fallbeschleunigung, müssen wir lediglich (3) nach dem Erdradius umstellen

$$R = \sqrt{f \frac{M}{g}} \quad (33)$$

und finden infolgedessen mit (33) für das Volumen der Erde:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(f \frac{M}{g} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (34).$$

Schließlich bekommen wir mittels (32) und (34) die mittlere Dichte der Erde heraus:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3 \cdot l \cdot \pi \cdot h^2}{f^{\frac{5}{2}} \cdot \Delta \tau^2} \left(\frac{g}{M} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (35).$$

Wenn wir nun in die Beziehung (35) für die Erdmasse erneut die Beziehung (32) einsetzen und für die Fallbeschleunigung die Beziehung (26) verwenden, erhalten wir für die mittlere Dichte der Erde die einfache Gleichung:

$$\rho = 3 \cdot \pi \frac{1}{f} \frac{l}{h} \frac{\Delta \tau}{\tau^3} \quad (36).$$

Die Gleichung (36) besagt, dass für die Messung der mittleren Dichte der Erde oder irgendeines anderen Planeten mittels einer Pendeluhr allein die Kenntnisse der Gravitationskonstante, der Pendellänge sowie der Höhendifferenz der Messpunkte über dem mittleren Planetenradius nötig sind, wobei sich der untere Messpunkt etwa auf dem mittleren Planetenradius befinden muss.

Heilige Pendeluhr!



Projektidee: In einem evakuierten Behälter wird die Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird über einen Monat der Takt der Uhr am Fuße des Magdeburger Doms gemessen und gemittelt. Die zweite Messung erfolgt an der höchstmöglichen Stelle des Doms, erneut für die Dauer von einem Monat. Nach Bekanntgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Ein Projekt mit doppeltem Otto-von-Guericke-Bezug.

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

Projekt: In einem evakuierten Behälter wird die vom Magdeburger Uhrmachermeister Herrn Joachim Hoppe rekonstruierte und funktionsfähige Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird der Takt der Uhr über einen Zeitraum von einem Monat am Fuß des Magdeburger Doms gemessen und gemittelt, die zweite Messung erfolgt analog an der höchstmöglichen Stelle des Doms. Nach Bekanntgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Alternativ ist es aber auch möglich, zuerst die Übergabe durchzuführen und dann, ebenfalls öffentlichkeitswirksam, das Experiment durchzuführen. Das Projekt hat einen doppelten Otto-von-Guericke-Bezug von planetarischer Dimension und ist demnach als schönes Gemeinschaftsprojekt zwischen der Otto-von-Guericke-Gesellschaft, der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg und der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg geeignet. Zugleich dient dieses Experiment dazu, andere Menschen für die Physik zu begeistern.

Zusammenfassung: Die Untersuchung über die Machbarkeit beschränkt sich auf die Abschätzung des physikalisch zu erwartenden Effekts und die Fehlerabschätzung, nicht aber auf technische, organisatorische oder finanzielle Fragen. Für die Beschleunigungsdifferenz ergibt sich ein Effekt von $\approx 0,3\text{mm}^2\text{s}^{-2}$, der Einfluss der Dommasse von 2 % auf die Fallbeschleunigung kann vernachlässigt werden. Die Schwingungsdauer liegt bei $\approx 0,75\text{s}$. Der gemittelte durchschnittliche Gangunterschied beträgt $\approx 8,5 \cdot 10^{-6}\text{s}$ und bewirkt, dass die Uhr am Fuß des Magdeburger Doms innerhalb eines Monats 39 Takte häufiger schlägt als die Uhr in der Höhe. Damit ist prinzipiell ein Effekt sichtbar, wobei die Messgenauigkeit ein Halbtakt ist, da das Pendel den Lichtweg während eines Takts zweimal unterbricht.



Magdeburger Dom, Foto des Autors

Die theoretischen Grundlagen des Experiments sind in [1] beschrieben. Aus dieser Arbeit sind auch alle notwendigen Formeln entnommen, das sind:

1. die Formel für die Bestimmung der Fallbeschleunigung aus der Schwingungsdauer:

$$g(R) = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2} \quad (1)$$

2. die Formel für die Bestimmung des Gangunterschieds

$$\Delta\tau = \tau(R+h) - \tau(h) \quad (2)$$

mit

$$g_0 = f \frac{M}{R^2} \quad (3)$$

$$g_h = f \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$\Delta\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \quad (4)$$

3. die Formel für die Bestimmung der Erdmasse aus der Höhendifferenz h der

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

Messpunkte und des Gangunterschieds:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta \tau} \right)^2 \quad (5)$$

4. die Formel für die Bestimmung des Erdradius aus der Höhendifferenz, der Schwingungsdauer am Fuß des Doms sowie dem Gangunterschied¹:

$$R = h \frac{\tau}{\Delta \tau} \quad (6)$$

5. die Formel für die Bestimmung der mittleren Dichte der Erde aus den gleichen Größen:

$$\rho = 3 \cdot \pi \frac{1}{f} \frac{l}{h} \frac{\Delta \tau}{\tau^3} \quad (7)$$

Wir beginnen mit der Abschätzung der Effekte.

Parameter

Diesen Untersuchungen legen wir die folgenden Parameter zugrunde:

Gravitationskonstante:

$$f = (6,67 \pm 0,007) \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Erdradius:

$$R = (6,37 \pm 0,01) \cdot 10^6 m$$

Höhe:

$$h = (70,00 \pm 0,01)m$$

Erdmasse:

$$M = (5,979 \pm 0,001) \cdot 10^{24} kg$$

Effekte

Fallbeschleunigungen

Für die Fallbeschleunigungen g_0 und g_h erhalten wir:

$$g_0 = f \frac{M}{R^2} = 9,82834 \frac{m}{s^2}$$

$$g_h = f \frac{M}{(R+h)^2} = 9,828018 \frac{m}{s^2}$$

Die Wirkung der Höhendifferenz auf die Fallbeschleunigung zeigt sich in der dritten Nachkommastelle, präziser ausgedrückt in einem Bereich von der Größenordnung

$$\Delta g \approx 0,3 \frac{mm}{s^2}. \text{ Angesichts der Kleinheit}$$

dieses Effekts ist zu prüfen, ob die Masse des Magdeburger Doms, konkret der beiden Türme, einen relevanten Einfluss auf die Messung ausüben kann.

Einfluss der Dommasse auf die Messung

Wir betrachten für diese Abschätzung lediglich einen Turm und nehmen dessen Einfluss doppelt. Man muss jedoch zusätzlich bedenken, dass sich die Turmmasse am Fuß des Doms in erster Linie über dem Messpunkt befindet. Damit mindert die Dommasse die Fallbeschleunigung g_0 um einen gewissen Betrag δg , während die Dommasse im gleichen Maße die Fallbeschleunigung g_h um den gleichen Betrag erhöht, das heißt, die Dommasse mindert den gesuchten Effekt.

Für eine Maximalabschätzung legen wir eine quadratische Grundfläche von $\approx 225m^2$ zugrunde. Mit der Höhe h ergibt sich ein Volumen von $\approx 15.750m^3$.

Wählen wir eine Dicht von $0,317 \frac{t}{m^3}$

(Gestein ist zwar schwerer, aber wir müssen die Hohlräume einbeziehen), können wir die Turmmasse auf rund

¹ Diese Formel ist in [1] nicht explizit angegeben, wurde an dieser Stelle jedoch unter Zugrundelegung von [1] hergeleitet.

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

5.000 Tonnen schätzen. Eine grobe Abschätzung liefert einen Effekt in der Größenordnung von rund $\approx 6 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}$, was einer Verkleinerung der gemessenen Fallbeschleunigung um $\approx 0,006 \frac{mm}{s^2}$ am

Boden des Doms oder einer Vergrößerung in der Höhe entspricht, das heißt, er beträgt 2 % und kann vernachlässigt werden.

Periodendauer und Gangunterschied

Für die Periodendauer am Boden bei einer Pendellänge von 14 cm ergibt sich:

$$\tau_0 = 0,749904(5)s$$

$$\tau_h = 0,749913(0)s$$

$$\Delta\tau = 8,5 \cdot 10^{-6}s$$

Taktzahlen für einen Monat

Ein Monat von 30 Tagen dauert $2,592 \cdot 10^6 s$ und für diesen Zeitraum ergeben sich die folgenden Taktzahlen:

$$k_0 = 3,456440 \cdot 10^6$$

$$k_h = 3,456401 \cdot 10^6$$

$$\Delta k = 39$$

Die Uhr am Boden des Magdeburger Doms schlägt innerhalb eines Monats 39 Takte mehr als die Uhr in der Höhe.

Da das Pendel die Lichtschranke während eines Takts zweimal unterbricht, werden 78 Unterbrechungen vom Zählwerk registriert, wenn sich alle periodischen oder aperiodischen Störeinflüsse über die Zeit herausmitteln. Die Genauigkeit ist damit ein Halbtakt.

Laufzeitunterschied für einen Monat

Die 39 Takte Unterschied entsprechen einer Zeitdifferenz von

$$\Delta T = 29,246 \frac{s}{\text{Monat}} \cdot$$

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, Astronomische Gesellschaft Magdeburg, „Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet“, 03/2013.

Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Projektidee: Mittels der Uhr Otto von Guericques werden der Erdradius, die Erdmasse sowie die mittlere Dichte der Erde ermittelt. In einem evakuierten Behälter wird die vom Magdeburger Uhrmachermeister Herrn Joachim Hoppe rekonstruierte und funktionsfähige Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird der Takt der Uhr über einen Zeitraum von einem Monat am Fuß des Magdeburger Doms gemessen und die Gesamtdauer für eine vorgegebene Taktanzahl ermittelt. Eine zweite Messung erfolgt analog an der höchstmöglichen Stelle des Doms. Die Temperatur wird in beiden Experimenten konstant gehalten, um thermische Einflüsse auf die Pendellänge auszuschalten. Nach Bekanntgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Alternativ ist es aber auch möglich, zuerst die Übergabe durchzuführen und dann, ebenfalls öffentlichkeitswirksam, das Experiment durchzuführen. Das Projekt hat einen doppelten Otto-von-Guericke-Bezug von planetarischer Dimension und ist demnach als schönes Gemeinschaftsprojekt zwischen der Otto-von-Guericke-Gesellschaft, der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg und der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg geeignet. Zugleich dient dieses Experiment dazu, andere Menschen für die Physik zu begeistern.

0. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen sind in [1] dargestellt. Die Otto-von-Guericke-Uhr wird als Pendel betrachtet, es gilt die Gleichung für die Fallbeschleunigung g :

$$g = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2} \quad (1),$$

unter der Annahme kleiner Pendelausschläge. In (1) gehen die Pendellänge l und die Periodendauer τ ein. Um periodische und aperiodische Fehler herauszumitteln, erfolgt die Messung über eine hinreichend große Anzahl von Takten k . Der Zusammenhang zwischen Taktzahl, Periodendauer und Messzeit T ist:

$$\tau = \frac{T}{k} \quad (2).$$

Durch Einsetzen in (1) folgt:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T^2} \quad (3).$$

Physikalisch ist g vom Abstand zum Erdmittelpunkt und von der Erdmasse abhängig. Da diese beiden Größen bestimmt werden sollen, sind zwei Gleichungen für diese beiden als unbekannt angenommenen Größen erforderlich. Diese beiden unabhängigen Gleichungen gewinnt man, wenn zwei Messungen in unterschiedlichem Abstand vom

Erdmittelpunkt unter Nutzung der Beziehung (1) durchgeführt werden. Mittels des Newtonschen Gravitationsgesetzes ergibt sich für den Radius der Erde:

$$R = h \frac{\tau_0}{\Delta\tau} = h \frac{T_0}{\Delta T} \quad (4),$$

für die Erdmasse:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta\tau} \right)^2 = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot k}{\Delta T} \right)^2 \quad (5)$$

und für die mittlere Dichte der Erde:

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{\Delta\tau}{\tau_0^3} = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{k^2}{T^2} \frac{\Delta T}{T_0} \quad (6).$$

Darin sind:

Gravitationskonstante: f

Höhenunterschied: h

Differenz der Messgrößen Δ

Die Genauigkeit sowie der Erfolg des Experiments hängen von der Genauigkeit der Bestimmung der Fallbeschleunigungen an den beiden Messorten ab. Unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungs-gesetzes

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial l} \right| \delta l + \left| \frac{\partial g}{\partial T} \right| \delta T + \delta \left| \frac{\partial g}{\partial k} \right| \delta k \quad (7)$$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

finden wir für den Fehler der Messung:

$$\delta g = 4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T^2} \delta l + 4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T^2} \frac{\delta T}{T} \quad (8).$$

Wegen des Zusammenhangs (2), aber auch weil k eine festgelegte natürliche Zahl ist, kann $\delta k = 0$ gesetzt werden. k wird durch ein Zählwerk eindeutig und fehlerfrei bestimmt.

Die Betrachtung von (8) zeigt, dass der zweite Term aufgrund von $\frac{\delta T}{T}$ beliebig klein wird,

wenn lediglich die Messung hinreichend lange durchgeführt wird. Demgegenüber wäre ein Fehler in der Pendellänge von systematischer Natur. Wegen der Kleinheit des zu erwartenden Effekts kann an diesem Fehler das Experiment scheitern. Deshalb muss die Pendellänge sehr genau bestimmt werden. In diesem Zusammenhang geht es nicht um eine genaue Längenmessung. Die Pendellänge ist hierbei als effektive Pendellänge dynamisch zu bestimmen, die die Schwingungseigenschaften des Uhrenpendels festlegt.

1. Bestimmung der Pendellänge

Die Ungenauigkeit der Pendellänge der Uhr ist die kritische Größe für das Experiment. Demnach ist es nötig, diese mit sehr hoher Genauigkeit zu bestimmen. Dies kann durch ein äußerst genaues supraleitendes Gravimeter ermöglicht werden, mit dem die Fallbeschleunigung am unteren Messort bestimmt wird. Wir bezeichnen die so „exakt“ ermittelte Fallbeschleunigung mit $\hat{g}$. Da die erste Messung über die Zeit T_0 (ca. ein Monat) durchgeführt wird, kann diese Zeit benutzt werden, um die Pendellänge zu bestimmen:

$$l = \frac{\hat{g}}{4 \cdot \pi^2} \frac{T_0^2}{k^2} \quad (9)$$

Der Fehler der Pendellänge ist demnach:

$$\delta l = \frac{T_0^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta \hat{g} + \frac{\hat{g} \cdot T_0}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta T_0 \quad (10).$$

Es muss zudem ermittelt werden, welche Genauigkeiten für $\hat{g}$ und T_0 erreicht werden können.

2. Der Gangunterschied

Der Gangunterschied über k Takte ergibt sich aus

$$\Delta T = T_h - T_0 = k \cdot \Delta \tau \quad (11)$$

mit

$$\Delta \tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \quad (12).$$

Die Indizes bezeichnen den Messort, das heißt $g_0 = g(R)$ und $g_h = g(R+h)$, wobei R für den Erdradius am Boden des Magdeburger Doms steht. Es wird hierbei näherungsweise angenommen, dass diese Höhe am Fuß des Doms ungefähr dem durchschnittlichen Erdradius entspricht. Für den Fehler des Gangunterschieds finden wir:

$$\begin{aligned} \delta \Delta T = k \left(\frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_h}} - \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_0}} \right) \delta l + \\ + \frac{\pi \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}} \delta g_h + \frac{\pi \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}} \delta g_0 \end{aligned} \quad (13).$$

3. Der Erdradius

Der Erdradius kann mithilfe der Beziehung (4) bestimmt werden. Es folgt der Fehler:

$$\delta R = \frac{h}{\Delta T} \delta T_0 + \frac{h \cdot T_0}{\Delta T^2} \delta \Delta T + \frac{T_0}{\Delta T} \delta h \quad (14).$$

4. Die Erdmasse

Unter Zugrundelegung von (5) ergibt sich die Fehlerabschätzung zu:

$$\begin{aligned} \delta M = \frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h^2 \cdot k^2}{\Delta T^3} \delta \Delta T + \\ + \frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h \cdot k^2}{\Delta T^2} \delta h \end{aligned} \quad (15).$$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto
von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

5. Die mittlere Dichte der Erde

Für den Fehler der Messung der mittleren Dichte der Erde folgt unter Verwendung von (6) schließlich:

$$\begin{aligned} \delta\rho = & \frac{3 \cdot \pi \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta l + \\ & + \frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h^2 \cdot T_0^4} \delta h + \\ & + \frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta \Delta T + \\ & + \frac{9 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^4} \delta T_0 \end{aligned} \quad (16).$$

6. Fehlersimulation

Die folgende Computersimulation untersucht die zu erwartenden Effekte sowie die Auswirkungen der einzelnen Fehler auf die gesuchten Ergebnisse. Für die Analyse ist die Betrachtung der Einzelterme von Interesse. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Übersicht über die Terme in Tabelle 2 angegeben. Tabelle 1 zeigt dagegen die Zuordnung der Terme zu den interessierenden Größen.

Tabelle 1: Zuordnung der Terme zu den Fehlern der Fallbeschleunigung, des Gangunterschieds, des Erdradius, der Erdmasse sowie der mittleren Erddichte.

$\delta g_0 = E_0 + E_1$
$\delta g_h = E_2 + E_3$
$\delta \Delta T = E_4 + E_5 + E_6$
$\delta R = E_7 + E_8 + E_9$
$\delta M = E_{10} + E_{11}$
$\delta \rho = E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{15}$

Tabelle 2: Übersicht über die Einzelterme.

Termbezeichnung in der Simulation	Term
E_0	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T_0^2} \delta l$
E_1	$4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T_0^2} \frac{\delta T}{T_0}$
E_2	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T_h^2} \delta l$
E_3	$4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T_h^2} \frac{\delta T}{T_h}$
E_4	$k \left(\frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_h}} - \frac{\pi}{\sqrt{l \cdot g_0}} \right) \delta l$
E_5	$\frac{\pi \cdot k \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}} \delta g_h$
E_6	$\frac{\pi \cdot k \cdot \sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}} \delta g_0$
E_7	$\frac{h}{\Delta T} \delta T_0$
E_8	$\frac{h \cdot T_0}{\Delta T^2} \delta \Delta T$
E_9	$\frac{T_0}{\Delta T} \delta h$
E_{10}	$\frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h^2 \cdot k^2}{\Delta T^3} \delta \Delta T$
E_{11}	$\frac{8 \cdot \pi^2}{f} \frac{h \cdot k^2}{\Delta T^2} \delta h$
E_{12}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta l$
E_{13}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h^2 \cdot T_0^4} \delta h$
E_{14}	$\frac{3 \cdot \pi \cdot l \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^3} \delta \Delta T$
E_{15}	$\frac{9 \cdot \pi \cdot l \cdot \Delta T \cdot k^2}{f \cdot h \cdot T_0^4} \delta T_0$

**Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt:
Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto
von Guericke**

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Tabelle 3 ergänzt die Auflistung um die Fehlerterme für die Pendellänge gemäß der Beziehung (10).

Tabelle 3: Die Genauigkeit der Pendellänge ist die Crux des Experiments. Die Tabelle gibt die Fehlerterme an.

E_{16}	$4 \cdot \pi^2 \frac{k^2}{T^2} \delta l$
E_{17}	$\frac{\hat{g} \cdot T_0}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta T_0$
Fehler Pendellänge	$\delta l = E_{16} + E_{17}$

Erste vorläufige Ergebnisse der Fehlersimulation

Die ersten Ergebnisse einer Simulation für bestimmte festgelegte Annahmen über die Genauigkeit der Messgrößen sowie die vorausgesetzten geophysikalischen Parameter sind in der folgenden Liste des Computerausdrucks angegeben. Diese Liste enthält die Computernomenklatur.

Liste 1: Computerausdruck der Simulation, in dieser Liste bedeutet $o = \delta$ und $D = \Delta$. Die Bedeutung der übrigen Größen ist selbsterklärend.

M = 5.979000000000000E+0024 kg
R = 6.370000000000000E+0006 m
f = 6.670000000000000E-0011 N m² / kg²
Error T = 0.01 s
Error g = 0.000001 m/s²
Error h = 0.001 m
h = 70.0 m
l = 0.14 m
Zeit = 1.0 Monate
Roh = 5.52232099390985E+0003 kg/m³
Roh = 5.52232099390985E+0000 g/cm³
g0 = 9.82823478383021E+0000 m/s²
gh = 9.82801878223060E+0000 m/s²
gh-g0 = -2.16001599611732E-0004 m/s²
tau0 = 7.49904785180876E-0001 s
tauh = 7.49913025892801E-0001 s

Dtau = 8.24071192506460E-0006 s
k = 3.45643880559425E+0006 Takte
T0 = 2.592000000000000E+0006 s
Th = 2.59202848351648E+0006 s
DT = 2.84835164835167E+0001 s
Error l = 1.53249208636097E-0008 m
Error g0 = 1.11375271740544E-0006 m/s²
Error gh = 1.11372782306434E-0006 m/s²
Error DT = 2.93733081329375E-0001 s
Error R = 6.57809378681311E+0004 m
Error M = 8.82045482341191E+0023 kg
Error Roh = 5.69489866916968E+01 kg/m³
Term E 0 = 0.000010946 %
Term E 1 = 0.000000386 %
Term E 2 = 0.000010946 %
Term E 3 = 0.000000386 %
Term E 4 = 0.000005473 %
Term E 5 = 0.515619414 %
Term E 6 = 0.515613940 %
Term E 7 = 0.000000386 %
Term E 8 = 1.031238827 %
Term E 9 = 0.001428571 %
Term E 10 = 14.731983246 %
Term E 11 = 0.020408163 %
Term E 12 = 0.000010946 %
Term E 13 = 0.000000000 %
Term E 14 = 1.031238827 %
Term E 15 = 0.000001157 %
Term E 16 = 0.000010175 %
Term E 17 = 0.000000772 %

Die Ergebnisse sind aus zwei Gründen vorläufig: 1. Die Formeln und das Computerprogramm sind noch nicht vollständig auf Richtigkeit geprüft. 2. Unklarheit herrscht im Augenblick über die zugrunde gelegten Inputgrößen, insbesondere über die Genauigkeit, mit der g für die Eichung bestimmbar ist.

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, „Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet“, Astronomische Gesellschaft Magdeburg, 03/2013