Antigravitation im klassischen Grenzfall der Reissner-Nordström-Metrik der Allgemeinen Relativitätstheorie

Klaus Retzlaff

26.11.2017

Zusammenfassung: *Die Reissner-Nordström-Metrik ist eine exakte, eindeutige, kugelsymmetrische und statische Lösung der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins (1915). Sie beschreibt die Raum-Zeit um ein elektrisch geladenes Gravitationszentrum. Wir leiten in diesem Artikel den klassischen Grenzfall her, um ihn für weitere Untersuchungen benutzen zu können. Bemerkenswert erscheint die Tatsache, dass der Radius mit dem klassischen Elektronenradius identisch ist, bei welchem die Dominanz der repulsiven Antigravitation mit der attraktiven Gravitation wechselt (Regimechange).*

***

Metrik und klassischer Grenzfall

Die Reissner-Nordström-Metrik ist für den ruhenden und weit entfernten Beobachter in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ, t) durch

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{\gamma}{4\pi c^4 \varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}} + \\ + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \\ - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{\gamma}{4\pi c^4 \varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\right)c^2 dt^2 \qquad (1),$$

mit

$$M = \frac{\gamma}{c^2} M_0 \qquad (2)$$

gegeben[1], M_0 ist die Masse der elektrisch geladenen Feldquelle. Die Terme, welche die elektrische Ladung Q und die elektrische Feldkonstante ε_0 enthalten, beschreiben den antigravitativen Einfluss einer Ladung auf die metrische Fundamentalgröße – den metrischen Tensor. Man erkennt das am Vorzeichen dieser Terme. Während im Fernfeld stets die Gravitation dominiert, wächst im Nahfeld ($r \to 0$) die Antigravitation über alle Schranken.

Für hinreichend große Abstände ist die Beziehung zwischen der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors und dem klassischen Potential durch die Beziehung

$$\Phi = \frac{c^2}{2}\left(1 + g_{44}\right) \qquad (3)$$

bestimmt. Die Verwendung von (3) für die folgenden Rechnungen erscheint zunächst als grobe Näherung, weil wir das gravitative Nahfeld um eine Ladung beschreiben wollen, dafür aber eine Formel benutzen, die nur eine geringe Deformation der Metrik voraussetzt. Das ist im ersten Augenschein nur für das Fernfeld gültig. Im Fernfeld dominiert die Gravitation (siehe oben), nur bewirkt die beginnende Dominanz der Antigravitation im Nahfeld einen Ausgleich. In einem spezifischen Abstand, nämlich

$$R = \frac{\gamma}{8\pi c^4 \varepsilon_0}\frac{Q^2}{M} \qquad (4),$$

gelten exakt pseudoeuklidische Verhältnisse[1] und in dem Bereich um R kann auch die Beziehung (3) als Näherung angewendet werden. Die Anwendung von (3) ermöglicht es, ein im Sinne der Newtonschen Physik klassisches antigravitatives Gravitationsfeld zu beschreiben, welches sich in der Nähe einer Ladung entfaltet.

Klassisches Potential

Unter Verwendung der Formel (3) finden wir für das klassische Gravitationspotential um eine Punktladung

$$\Phi = -\gamma\frac{M_0}{r} + \gamma\frac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2} \qquad (5).$$

Der erste Term ist das klassische Newtonsche Gravitationspotential und der zweite Term ergibt eine ladungsinduzierte Antigravitation. Stellen wir die Frage, bei welchem Abstand das Potential Φ verschwindet, weil sich Gravitation und Antigravitation ausgleichen, finden wir in Übereinstimmung mit (4)

$$\Re = R = \frac{1}{8\pi c^2 \varepsilon_0}\frac{Q^2}{M_0} \qquad (6).$$

Die Beziehung (6) unterscheidet sich von (4) nur um die Substitution (2).

---

[1] In der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors wurde aus didaktischen Gründen c^2 nicht gekürzt.

Klassische Feldstärke

Wir bestimmen jetzt die Feldstärke der Gravitation um eine elektrisch geladene Punktladung gemäß

$$G_G = -\nabla\Phi = -\frac{\partial}{\partial r}\Phi \qquad (7),$$

das ergibt die Summe

$$G_G = -\gamma\frac{M_0}{r^2} + \gamma\frac{1}{4\pi c^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^3} \qquad (8).$$

Die Antigravitation im Nahfeld ist potentiell stärker durch das Quadrat der Ladung und die höhere negative Potenz des Radius. Nur der seltsame Vorfaktor

$$\frac{1}{4\pi c^2\varepsilon_0} \equiv 1\cdot 10^{-7}\frac{kg\cdot m}{C^2} \qquad (9)$$

wirkt gegenüber der Gravitation schwächend auf die Antigravitation.

Die Antigravitation erscheint hier als eine dominierende Kraft des Mikrokosmos, denn sie erweist sich sogar als stärker als die Coulomb-Kraft, wenn der Abstand r nur hinreichend klein ist.

Es ist bemerkenswert, dass dieses aus der Reissner-Nordström-Metrik resultierende Faktum in den Theorien der Hochenergiephysik keine Rolle spielt. Gilt dort die ART gar nicht mehr?

Regimechange am klassischen Elektronenradius

Bestimmen wir den Potentialverlauf um ein Elektron im Rahmen der klassischen Näherung für die Reissner-Nordström-Metrik, so finden wir eine eigenartige Tatsache vor. Der Wechsel des Regimes zwischen antigravitativer Repulsion und gravitativer Attraktion erfolgt genau am klassischen Elektronenradius, denn setzen wir (8) gleich null und verwenden wir die Masse und die Ladung für ein Elektron, dann finden wir

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi c^2\varepsilon_0 m_e} \qquad (10).$$

Diese Eigentümlichkeit ist an der Abbildung für den Potentialverlauf erkennbar.

Dabei ist der klassische Elektronenradius ein Konstrukt, kein realer Radius. Der klassische Elektronenradius ergibt sich rechnerisch aus der Energie, die notwendig ist, um die auf einer Kugelschale verteilt gedachte Elementarladung soweit durch Schrumpfung des Kugelradius zu verdichten, dass diese Energie gleich der Ruheenergie des Elektrons gemäß der Einstein'schen Masse-Energie-Äquivalenz ist.

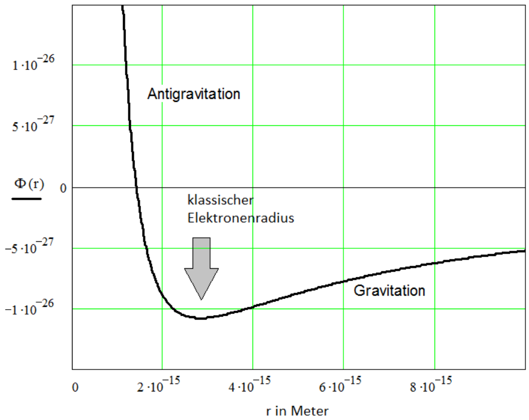

Abbildung: Regimechange am klassischen Elektronenradius.

Während im relativistischen Fall nach der Reissner-Nordström-Metrik der Regimechange beim halben klassischen Elektronenradius erfolgt, liefert der klassische Grenzfall die Identität der Radien. Der Unterschied ist ein Faktor 2. Das erinnert uns zwar daran, dass sich auch die gravitativen Lichtablenkungen im klassischen und im relativistischen Fall um einen Faktor 2 unterscheiden, doch die unterschiedlichen Radien erklären sich hier, weil im relativistischen Fall das gravitative und antigravitative Potential und im klassischen Grenzfall die jeweiligen Kräfte/Feldstärken verglichen wurden.

Quellen

[1] K. Retzlaff, 11/2017, *„Ladungsinduzierte Antigravitation im Coulomb-Feld"*, http://astronomie-magdeburg.de/ladungsinduzierte-antigravitation-im-coulomb-feld.html