Trägheitsinduktion und Relativität der Zeit

Klaus Retzlaff

Gewidmet meinem Freund, dem Uhrmachermeister Joachim Hoppe

Zusammenfassung: Die absolute Newtonsche Zeit beruht auf der absoluten Trägheit und im Kontrast dazu involviert eine Trägheitsinduktion im Sinne des Machschen Prinzips, bzw. der Mach-Einstein-Doktrin automatisch eine Relativität der Zeit, doch die in diesem Aufsatz vorgenommenen Betrachtungen gehen über die spezifische jeweils zugrunde gelegte Theorie hinaus und verweisen auf einen universellen Zusammenhang zwischen Trägheit und Zeit in dem Sinne, dass das physikalische Trägheitsverhalten das Zeitverhalten determiniert.

Die Zeit ist eine physikalische Größe, in der sich Prozesse in ein Verhältnis setzen. Gemessen wird die Zeit daher unter Bezugnahme auf periodische physikalische Vorgänge, die durch Uhren realisiert werden. Uhren sind Systeme, die den physikalischen Gesetzen unterliegen, welche sich als Wechselspiel zwischen kinetischer und potentieller Energie darstellen lassen. In einer Newtonschen Welt kann eine mechanische Uhr durch die Lagrange-Funktion:

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 \qquad (1)$$

beschrieben werden[1]. Dies ist ein ungedämpfter harmonischer Oszillator mit der trägen Schwungmasse m und der Federkonstante k, x ist die Auslenkung aus der Ruhelage. Die Bewegung der Schwungmasse wird durch die zugehörige Lagrange-Gleichung

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0,$$

bzw. durch

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (2)$$

beschrieben. Das entspricht der Schwingungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \qquad (3)$$

und diese hat die spezielle Lösung:

$$x(t) = X \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (4)$$

mit der Amplitude X und dem Frequenzquadrat $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Bedenkt man, dass $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$, dann ist die Periodendauer einer Schwingung:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (5)$$

Durch die Gleichungen (1) bis (5) wird eine Uhr definiert, insbesondere gibt (5) den Takt. Der Takt ist die Basis zur Messung der Dauer physikalischer Prozesse. Diese Dauer wird in Vielfachen oder Teilen des Taktes angegeben. Der Takt ist augenscheinlich von der Schwungmasse und der Federkonstante abhängig. Verändern wir die Schwungmasse oder die Federkonstante, so ändert sich der Takt, doch wir können nicht behaupten, dass sich dadurch der Zeitablauf geändert hätte. Uhren können sich bezüglich k und m unterschieden, sie können im Vergleich vor-, nach- oder gleichgehen, dieses Verhalten ändert nichts am zeitlichen Verlauf der Prozesse, deren Dauer mit der Hilfe der Uhren gemessen wird.

Betrachten wir einen einfachen Vorgang der Beschleunigung eines Körpers der Masse M bei Einwirkung einer konstanten Kraft F für die Dauer $t = \lambda \cdot T$, d.h. t ist irgendein Vielfaches der Periodendauer der oben beschriebenen Uhr und die Beschleunigung $\ddot{x} = a$ sei eine Konstante. Auf Grund des 2. Newtonschen Axioms:

$$F = M \cdot \ddot{x}, \qquad (6)$$

folgt dann aus (6) das Weg-Zeit-Gesetz:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \qquad (7)$$

der geradlinig gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Mit $v_0 = 0$ und $x_0 = 0$ gilt einfach:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 = \frac{a}{2}\lambda^2 \cdot T^2 \qquad (8)$$

[1] Wir beschreiben hier eine ideale reibungsfreie mechanische Uhr.

für den von der Masse M zurückgelegten Weg.
Nehmen wir nun an, wir hätten eine andere Uhr, mit den Parametern m' und k', so wäre deren Periodendauer:

$$T' = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m'}{k'}} . \tag{9}$$

Sowohl die Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung würden sich im selben Verhältnis darstellen, wie die Schwingungsdauern der unterschiedlichen Uhren. Ein und derselbe Prozess wäre nur in unterschiedlichen Zeiteinheiten (Periodendauern) dargestellt:

$$x(t) = x(\lambda \cdot T) = x(\lambda' \cdot T') . \tag{10}$$

Damit wäre die Zeitdauer t eine Invariante des Prozesses, für die

$$t = \lambda \cdot T = \lambda' \cdot T' \tag{11}$$

gilt. Die Verwendung unterschiedlicher Uhren entspricht damit nur der Wahl unterschiedlicher Zeiteinheiten als Basis für die Messung der Zeit und aus (11) folgt unmittelbar die Umrechnung, bzw. der Umrechnungsfaktor:

$$\frac{T}{T'} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \kappa , \tag{12}$$

und die Größen λ und λ' sind lediglich unterschiedliche Taktzahlen.
Die Zeit selbst ist damit eine absolute und universelle Größe, in der sich Prozesse aufeinander beziehen lassen, sie selbst bleibt aber von den Prozessen unberührt.
Die Verhältnisse ändern sich grundlegend, wenn die Trägheit der Objekte von ihrem Ort abhängig wird. Ein Beispiel für eine solche Ortsabhängigkeit der Trägheit wäre das zur Mach-Einstein-Doktrin verschärfte Machsche Prinzip, wonach die Trägheit der Körper vollständig durch das Gravitationspotential ϕ induziert wird. Für unsere Betrachtung legen wir die Trägheitsinduktion gemäß der Trägheitsfreien[2] Mechanik [1] zugrunde:

$$m = \frac{2\beta}{c^2} m_s |\phi| , \tag{13}$$

m ist die träge Masse, m_s ist die schwere Masse, β ist die Konstante für die Trägheitsinduktion[3] und c^2 ist das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit. c^2 wurde nur deswegen in die Trägheitsfreie Mechanik eingeführt, um den Vergleich mit der Allgemeinen Relativitätstheorie zu erleichtern, einen anderen Sinn hat das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit in ihr nicht. Für unsere Zwecke reicht es aus, zu konstatieren, dass die träge Masse eines Körpers eine lineare Funktion des Gravitationspotentials ist, d.h. $m \propto |\phi|$.
Wir führen nun ein Gedankenexperiment durch und zeigen damit, dass die physikalische Zeit untrennbar mit der Trägheit verknüpft ist. Diese Feststellung ist von allgemeiner Natur und geht über die Besonderheit der jeweils zugrunde gelegten Theorie hinaus, gleichgültig, ob Newtonsche Mechanik, Trägheitsfreie Mechanik oder Relativitätstheorie zugrunde gelegt werden: Die Zeit ist ein Oberflächenphänomen der Trägheit, sie wird durch die Trägheit determiniert.
In unserem Gedankenexperiment setzen wir die Trägheitsinduktion gemäß (13) voraus und betrachten die Verhältnisse an verschiedenen Positionen. In der Nähe einer lokalen Massenansammlung setzt sich das Gravitationspotential aus einem lokalen und einem kosmischen Anteil zusammen.

$$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi_{lokal}(\vec{r}) + \phi_{Kosmos} . \tag{14}$$

Im intergalaktischen Raum sei das lokale Potential vernachlässigbar, so dass dort:

$$\phi' = \phi_{Kosmos} \tag{15}$$

[2] Die Bezeichnung, „Trägheitsfreie Mechanik“, geht darauf zurück, dass die Lagrange-Funktion, welche das Machsche Prinzip moduliert, keinen Trägheitsterm enthält. Die Trägheit ergibt sich in dieser Theorie erst als Induktionseffekt der Gravitationspotentiale der im Kosmos verteilten schweren Massen.

[3] Die Trägheitsfreien Mechanik liefert bei einem Wert von $\beta = \frac{3}{2}$ exakt die Einsteinsche Periheldrehung des Planeten Merkur.

Trägheitsinduktion und Relativität der Zeit

Klaus Retzlaff

gilt. Nun betrachten wir zwei unterschiedliche Laboratorien, deren Gravitationspotentiale vernachlässigbar seien. Das eine Laboratorium soll sich weit entfernt von Galaxien, d.h. im intergalaktischen Raum befinden, also im Gravitationspotential ϕ', während sich das andere Laboratorium in unmittelbarer Umgebung einer lokalen Massenansammlung, also im Gravitationspotential ϕ, befinden soll. Genau dort soll sich der mit den Gleichungen (6) bis (8) beschriebne Vorgang abspielen. In unserem Gedankenexperiment wird dieser Vorgang einmal mit der Uhr in der Nähe der lokalen Massenansammlung und einmal mit der Uhr im intergalaktischen Raum beurteilt. Um einen interpretierbaren Vergleich durchführen zu können, müssen wir geeichte Uhren benutzen. Das sind Uhren, welche bei identischen Gravitationspotentialen den gleichen Takt liefern, d.h. für die gilt: $\lambda = \lambda'$. Das wird erreicht, wenn unter gleichen Bedingungen, d.h. für $\phi = \phi'$, die Schwungmassen und die Federkonstanten der beiden Uhren übereinstimmen, obwohl es wegen (5) ausreichen würde, wenn nur das Verhältnis beider gleich groß wäre, in anderen Worten, die Uhren sind dann geeicht, wenn ihre Periodendauern in ein und demselben Gravitationspotential identisch sind.

Wir befinden uns jetzt gedanklich im Gravitationsfeld der lokalen Massenansammlung und das Gravitationspotential ist durch (14) gegeben, während die Schwungmasse durch (13) bestimmt ist. Die Periodendauer der geeichten Uhr in diesem Potential ist dann:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m_s \cdot 2 \cdot \beta}{k \cdot c^2} |\phi|} \qquad (15)$$

und der Vorgang der Beschleunigung einer Testmasse M, die sich ebenfalls im Potential ϕ befindet, dauert in Takten gemessen:

$$t = \lambda \cdot T . \qquad (16)$$

Für den zurückgelegten Weg gilt (8) und mit

$$a = \frac{F}{M} = \frac{F \cdot c^2}{M_s \cdot 2 \cdot \beta \cdot |\phi|} \qquad (17)$$

folgt:

$$x = x(t) = \frac{1}{4} \frac{F \cdot c^2}{M_s \cdot \beta \cdot |\phi|} (\lambda \cdot T)^2 , \qquad (18)$$

bzw. nach Einsetzen von (17) in (18) folgt:

$$x = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot F \cdot \lambda^2}{k} \frac{m_s}{M_s} . \qquad (19)$$

Nun begeben wir uns in den intergalaktischen Raum, um denselben Vorgang zu beobachten. Dort schwingt unsere Uhr mit der Periodendauer:

$$T' = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m'}{k}} , \qquad (20)$$

mit

$$m' = \frac{2\beta}{c^2} m_s |\phi'| , \qquad (21)$$

also mit:

$$T' = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{k \cdot c^2} |\phi'|} \qquad (22)$$

Da $|\phi'| < |\phi|$ gilt, hat die Schwungmasse im intergalaktischen Raum eine geringere Trägheit und daraus folgt:

$$T > T' . \qquad (23)$$

Misst man den Vorgang in Takten der Dauer T', so ist das gleichbedeutend mit $\lambda < \lambda'$, obwohl es sich um geeichte Uhren handelt. Da in dem intergalaktischen System mehr Taktschläge erforderlich sind, bis der beobachtete Prozess abgeschlossen ist, erscheint vom Standpunkt des intergalaktischen Beobachters der Prozess selbst verlangsamt und die unterschiedliche Taktzahl ist nicht Ausdruck für unterschiedliche Uhrenkonstruktionen, sondern für einen unterschiedlichen Zeitablauf.

Trägheitsinduktion und Relativität der Zeit

Klaus Retzlaff

Das dem so ist, wird sofort offensichtlich, wenn derselbe Beschleunigungsvorgang im intergalaktischen Raum durchgeführt wird. Im intergalaktischen Raum ist die Trägheit des Probekörpers nur noch:

$$M' = M_s \frac{2 \cdot \beta}{c^2} |\phi'| . \tag{24}$$

Die bei gegebener angreifender Kraft F resultierende Beschleunigung ist dann:

$$a' = \frac{F}{M'} = \frac{F \cdot c^2}{M_s \cdot 2 \cdot \beta \cdot |\phi'|} \tag{25}$$

Und der in der Zeit $\lambda \cdot T'$ zurückgelegt Weg ist schließlich:

$$x' = x'(t') = \frac{1}{2} \frac{F}{M'} (\lambda \cdot T')^2 . \tag{26}$$

Wir haben den Prozess absichtlich λ Takte lang mit der Taktdauer T' laufen lassen. Das ist kein Druckfehler, sondern bezweckt das Ziel, die zurückgelegten Wege x und x' zu vergleichen, denn wir legen hier dieselbe Taktzahl zugrunde, wie bei dem Prozess in der lokalen Massenansammlung und wir finden schließlich:

$$x' = \frac{2 \cdot \pi^2 \cdot F \cdot \lambda^2}{k} \frac{m_s}{M_s} . \tag{27}$$

Der Vergleich von (19) und (27) zeigt die Gleichheit der Strecken. Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Trägheitsinduktion automatisch den Zeitablauf determiniert. Wir haben hier einen allgemeinen Zusammenhang zwischen dem Trägheitsverhalten und dem Zeitverhalten gefunden. Dieser Zusammenhang geht über die spezifische Theorie hinaus und hat einen universellen Charakter. Ist das Trägheitsverhalten bekannt, so kann dieses Verhalten unmittelbar auf die Zeit übertragen werden.

Nehmen wir als bekanntes Beispiel die Formel für die träge Masse aus der Speziellen Relativitätstheorie:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \tag{28}$$

so kann nach den obigen Darlegungen sofort auf die ebenfalls berühmte Formel für die Zeitdilatation:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{29}$$

geschlossen werden, indem einfach die Ersetzungen $m \leftrightarrow t$ und $m_0 \leftrightarrow t_0$ vorgenommen werden. Es ist bemerkenswert, das (29) in der Regel aus geometrischen Betrachtungen und dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit abgeleitet wird, während wir hier vom Trägheitsverhalten direkt auf das Zeitverhalten geschlossen haben. Dem gegenüber wird (28) in der Speziellen Relativitätstheorie aus der Lorenztransformation deduziert, die wiederum aus (29) in Verbindung mit der Lorenzschen Längenkontraktion hergeleitet werden kann. Die Lorentzsche Längenkontraktion und die Zeitdilatation leiten sich wiederum aus dem Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit her, welches Ausdruck der Minkowski-Geometrie der vierdimensionalen Raum-Zeit ist. In die Invarianz des Minkowskischen Linienelementes

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 , \tag{30}$$

aus welcher in der Speziellen Relativitätstheorie die Beziehung (29), d.h. das Zeitverhalten, deduziert wird, geht aber die Trägheit gar nicht explizit ein. In der Speziellen Relativitätstheorie erscheint vielmehr das Trägheitsverhalten als eine Folge der raumzeitlichen Struktur.

Mein Dank gilt Dipl. Phys. Martin Nischang für das kritische Nachrechnen.

Quellen

[1] H.-J. Treder, Die Relativität der Trägheit, Akademie-Verlag Berlin 1972